

Topologische Vektorraumstruktur
analytischer Moduln und ein
Flachheitskriterium

Eckart Priesack

Topologische Vektorraumstruktur analytischer Moduln
und ein Flachheitskriterium

Dissertation an der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität

München

von

Eckart Priesack
aus München

eingereicht am 15.10.1986

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Wolffhardt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H.W. Schuster

Tag der mündlichen Prüfung: 23.2.1987

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstr. 15, Tel. 288663

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung	I - VI
0. Grundbegriffe	1 - 25
1. Die topologische Vektorraumstruktur analytischer Moduln	26 - 29
2. Der relative Fall	30 - 36
3. Flachheit = Pseudofreiheit = nukleare Freiheit	37 - 48
4. Beispiele zur Beschreibung analytischer Modulhomomorphismen in der Kategorie der topologischen Vektorräume	49 - 65
Literaturverzeichnis	66 - 68

Einleitung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher führte die konsequente Verwendung der Idee der Riemannschen Fläche zum Begriff des komplexen Raums. Die Theorie komplexer Räume beginnt notwendig mit der lokalen Untersuchung analytischer Mengen und holomorpher Gleichungssysteme.

Eine Teilmenge A einer offenen Menge $W \subset \mathbb{C}^n$ heißt analytische Menge in W , wenn es zu jedem $x \in W$ eine offene Umgebung U von x und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_r$ gibt, so daß $A \cap U = \{u \in U : f_1(u) = \dots = f_r(u) = 0\}$ ist.

Zu einer analytischen Menge A in W definiert man ihren Mengenkeim A_x im Punkt $x \in W$ als die von A repräsentierte Äquivalenzklasse von Teilmengen von W bezüglich folgender Relation: Zwei Mengen $X, Y \subset W$ heißen gleich bei $x \in W$, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $U \cap X = U \cap Y$.

Sei nun $W \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und A_0 ein analytischer Mengenkeim in $0 \in W$. Sei $R_n := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ die $\mathbb{C}$ -Algebra der konvergenten Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$. Durch $\mathcal{I}(A_0) := \{f \in R_n : f|_{A_0} = 0\}$ wird jedem Mengenkeim A_0 in $0 \in W$ ein Ideal in R_n zugeordnet, wobei $f|_{A_0} = 0$ bedeute, daß eine offene Nullumgebung U in $\mathbb{C}^n$ existiert, so daß f in U holomorph ist und A_0 in U einen analytischen Repräsentanten X mit $f|_X = 0$ hat.

Auf diese Weise läßt sich die lokale Theorie analytischer Mengen teilweise in die Theorie der lokalen analytischen $\mathbb{C}$ -Algebren, d.h. der zu den Faktoralgebren $R_n/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subsetneq R_n$ Ideal, $n \in \mathbb{N}$, isomorphen $\mathbb{C}$ -Algebren, einordnen. In diesem Zusammenhang sind also Eigenschaften dieser Algebren besonders interessant.

Ist $F_n := \mathbb{C}\llbracket z_1, \dots, z_n \rrbracket$ die $\mathbb{C}$ -Algebra der formalen Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$, dann ist die $\mathbb{C}$ -Unteralgebra $R_n := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ der konvergenten Potenzreihen in den n Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$ als Vereinigung $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^n} B_t$ der Banachalgebren

$B_t := \{f \in F_n : \|f\|_t < +\infty\}$ mit den Normen $\|f\|_t := \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} |a_\mu| t^\mu$

für $f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^n} a_\mu z^\mu \in F_n$ und $t \in \mathbb{R}_+^n$ definiert.

Mit der Finaltopologie bezüglich der Inklusionen $B_t \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+^n$ hat man auf $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ eine natürliche Topologie, die sogenannte kanonische Topologie oder auch Folgentopologie auf $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$. Sie macht $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ zu einer lokalkonvexen topologischen $\mathbb{C}$ -Algebra, in der alle Ideale abgeschlossen sind. Die kanonische Topologie überträgt man auf die analytischen $\mathbb{C}$ -Algebren und die endlich erzeugten Moduln über analytischen $\mathbb{C}$ -Algebren. Sie heißt wieder kanonische Topologie oder Folgentopologie und macht die Algebren bzw. Moduln zu lokalkonvexen $\mathbb{C}$ -Vektorräumen, so daß gilt: Alle Modulhomomorphismen sind stetig, alle Epimorphismen sind offen, Untermoduln sind stets abgeschlossen und tragen die Relativtopologie. Für die Kategorie A-MOD, die Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln über einer analytischen Algebra A, kann man somit einen Vergißfunktor $V_A : \text{A-MOD} \rightarrow \mathbb{C}\text{-TVR}$ in die Kategorie der topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume mit den $\mathbb{C}$ -linearen stetigen Abbildungen als Morphismen definieren. V_A ordnet jedem endlich erzeugten A-Modul A^M seinen zugrundeliegenden lokalkonvexen $\mathbb{C}$ -Vektorraum M zu, und jedem A-Modulhomomorphismus seine zugrundeliegende $\mathbb{C}$ -lineare stetige Abbildung. Diejenigen topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume V, für die es eine analytische $\mathbb{C}$ -Algebra A und einen endlich erzeugten A-Modul $M \in \text{A-MOD}$ gibt, so daß V als topologischer Vektorraum isomorph zu $V_A(M)$ ist, werden dann analytische Moduln genannt (siehe [Wo]).

Im 1. Abschnitt der vorliegenden Arbeit werden diese mit algebraischen und funktionentheoretischen Methoden erhaltenen lokalkonvexen Vektorräume mit funktionalanalytischen Methoden beschrieben und als topologische Vektorräume charakterisiert. Man erhält folgendes Ergebnis (1.4):

Ist M ein unendlichdimensionaler lokalkonvexer $\mathbb{C}$ -Vektorraum, der ein analytischer Modul ist, so ist M als topologischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph zu $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$, dem starken Dualraum von $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, dem Raum der auf $\mathbb{C}^n$ ganzen holomorphen Funktionen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Das heißt, M ist als topologischer $\mathbb{C}$ -Vektorraum für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph zum starken Dualraum des Potenzreihenraums von unendlichem Typ $\bigwedge_{\infty}(\alpha)$ über $\mathbb{C}$ für $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha_k := \sqrt[n]{k}$.

Die natürliche Zahl n , für die M zu $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ isomorph ist, ist dabei die Krulldimension eines endlich erzeugten A -Moduls ${}_A M$ über einer analytischen $\mathbb{C}$ -Algebra A , für den M zu $V_A({}_A M)$ isomorph ist. Umgekehrt gilt: Ist ${}_A M$ endlich erzeugter A -Modul über einer analytischen $\mathbb{C}$ -Algebra A und ist M zu $V_A({}_A M)$ isomorph, so hat ${}_A M$ über A die Krulldimension n .

Die Zahl n ist die charakterisierende Invariante analytischer Moduln unendlicher $\mathbb{C}$ -Vektorraumdimension unter $\mathbb{C}$ -linearer Homöomorphie.

Dieses Resultat basiert auf dem Dualitätssatz von Toeplitz-Köthe-Tillmann (0.4.10), dem Satz von Kolmogorov (0.6.4) und dem Lemma (1.1), durch das sich die analytischen Moduln in gewissem Sinn zerlegen lassen:

(1.1) Lemma : Seien A und B analytische Algebren, $h : A \rightarrow B$ ein analytischer Homomorphismus, M ein endlicher B -Modul und N ein endlicher A -Modul.

Ist $p : M \rightarrow N$ eine A -lineare, surjektive und bezüglich der kanonischen Topologien auf M und N stetige Abbildung, dann gibt es eine $\mathbb{C}$ -lineare stetige Abbildung $s : N \rightarrow M$ mit $p \circ s = \text{id}_N$.

Im 2. Abschnitt wird dieses Lemma vom absoluten auf den relativen Fall verallgemeinert: Für bestimmte Probleme ist es sinnvoll nicht nur die Kategorie AN der komplexen Räume mit den holomorphen Abbildungen, sondern auch die Kategorie AN/S von komplexen Räumen über einem festen komplexen Raum S zu betrachten. Dabei versteht man unter einem komplexen Raum X über S einen komplexen Raum X zusammen mit einer holomorphen Abbildung $p_X : X \rightarrow S$ und unter einem Morphismus zwischen komplexen Räumen X und Y über S eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $p_Y \circ f = p_X$. Man spricht bei Betrachtungen über der Kategorie AN/S vom relativen Fall, im Gegensatz zum absoluten Fall der Kategorie $AN = AN/0$. Auf der Ebene der analytischen Algebren heißt dies, daß man nicht nur analytische Algebren über $\mathbb{C}$, sondern auch analytische Algebren, die A -Algebren über einer festen analytischen Algebra A sind, betrachtet.

Die Verallgemeinerung (2.6) von Lemma (1.1) geschieht mit der Methode der Dévissage, der Aufbereitung eines Moduls, die auf M. Raynaud und L. Gruson (siehe [R-G]) zurückgeht und für analytische Moduln von W. Kexel (siehe [Ke]) formuliert wurde.

Im 3. Abschnitt wird dieses verallgemeinerte Lemma (2.6) auf kohärente Garben über komplexen Räumen angewandt. Für eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow S$ zwischen komplexen Räumen X und S und eine auf X kohärente Garbe $\mathcal{F}$ wird der Begriff der totalen Aufbereitung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ in einem Punkt a des Trägers von $\mathcal{F}$ über S definiert und anschließend die Existenz einer solchen Aufbereitung bewiesen. Dabei kommt es auf die Eigenschaften einer speziellen Form der totalen Aufbereitung eines analytischen Moduls an, deren Existenz im 2. Abschnitt gezeigt wurde. Zunächst ergibt sich folgendes

(3.6) Lemma : Sei S ein komplexer Raum, $P \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung, $p : S \times P \rightarrow S$ die Projektion auf S , $\mathcal{F} \in \text{Coh}(S \times P)$ und $a := (y, 0) \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Äquivalent sind :

- i) $\mathcal{F}$ ist in a p -flach.
- ii) Nach eventueller Koordinatentransformation in $\mathbb{C}^n$ gibt es eine Steinsche Umgebung $V \subset S$ von y und eine Nullumgebung $W := P(0, r) \subset P$ mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$ und eine totale Aufbereitung $\mathcal{P} = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)_{0 \leq j \leq k}$ von $\mathcal{F}$ in a über S , die einen $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus

$$\alpha : \bigoplus_{j=0}^k (p_{s_j}|_{V \times W_{s_j}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{s_j}}^{1_j} \xrightarrow{\sim} (p|_{V \times W})_*(\mathcal{F}|_{V \times W})$$

induziert.

Für $0 \leq i \leq n$ ist dabei $W_i := P(0, (s_1, \dots, s_i))$ mit den Projektionen $p_i : S \times W_i \rightarrow S$ und $q_i : S \times W \rightarrow S \times W_i$.

Dieses Lemma führt zu einem Flachheitskriterium (3.9), das die Begriffe "flach", "pseudofrei" und "nuklear-frei" in Beziehung bringt. Den Begriff "pseudofrei" definiert H. Hironaka in [Hi], dort wird auch ein mit Lemma (3.6) in Zusammenhang stehender Satz ([Hi], Theorem 2.1. bzw. Lemma 2.1.5.) bewiesen. Der Begriff "nuklear-frei" findet sich in [D-V] und wird beim Beweis des Grauert'schen Bildgarbensatzes benutzt.

Als Anwendung von (3.9) erhält man in (3.12) eine Verallgemeinerung eines Flachheitskriteriums für endliche holomorphe Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen komplexen Räumen X und Y mit reduziertem Y .

Im 4. Abschnitt wenden wir uns wieder den analytischen Moduln aus dem 1. Abschnitt zu. Aus Lemma (1.1) ergibt sich als Korollar (1.2) der Satz von Jurchescu, nach dem alle kurzen exakten Sequenzen aus $A\text{-MOD}$ über einer analytischen Algebra A als kurze exakte Sequenzen in der Kategorie der topologischen Vektorräume zerfallen. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob es eine abelsche Unterkategorie $\mathcal{C}$ der Kategorie $\mathbb{C}\text{-TVR}$ der topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume gibt, deren Objekte genau die analytischen Moduln sind, so daß für alle analytischen Algebren A gilt:

- a) Die Vergißfunktoren $V_A : A\text{-MOD} \rightarrow \mathbb{C}\text{-TVR}$ induzieren Vergißfunktoren $V_A : A\text{-MOD} \rightarrow \mathcal{C}$, und
- b) Für kurze exakte Sequenzen S aus $A\text{-MOD}$ zerfällt die kurze exakte Sequenz $V_A(S)$ in $\mathcal{C}$ (und nicht nur in $\mathbb{C}\text{-TVR}$).

So eine Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es jedoch nicht. Dies folgert man aus Beispiel (4.1), das zeigt, daß es für $R := \mathbb{C}\{z\}$ zwei R -Modulhomomorphismen $i : L \rightarrow M$ und $q : \tilde{M} \rightarrow P$ gibt, so daß $V_R(M) = V_R(\tilde{M})$ gilt und der Kern von $s := V_R(q) \circ V_R(i)$ kein analytischer Modul ist.

Doch läßt sich für Modulkategorien $A\text{-MOD}$ endlich erzeugter A -Moduln über analytischen Algebren A der Krulldimension $\dim_A(A) = 1$ eine abelsche Kategorie $\mathcal{K}$ angeben, in der alle kurzen exakten Sequenzen zerfallen und für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A\text{-MOD} & \xrightarrow{F_{A,h}} & \mathbb{C}\{z\}\text{-MOD} & \xrightarrow{U} & \mathcal{K} \\ & \searrow V_A & & \swarrow V & \\ & & \mathbb{C}\text{-TVR} & & \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Dabei bezeichnen $F_{A,h}$ den von einer endlichen Ringerweiterung $h : \mathbb{C}\{z\} \rightarrow A$ nach dem Noetherschen Normalisierungslemma induzierten Funktor und U, V, V_A die entsprechenden Vergißfunktoren.

Für Modulkategorien $A\text{-MOD}$ über analytischen Algebren A höherer Krulldimension bleibt die Frage nach einer Aussage dieser Art offen. Beispiele, die auf Untersuchungen von D. Vogt und M.J. Wagner beruhen, weisen auf die Schwierigkeiten bei der Konstruktion solcher Kategorien mit Methoden der Theorie der topologischen Vektorräume hin: Entscheidend für die Existenz von $\mathcal{K}$ ist die Tatsache, daß die Torsionsuntermoduln endlich erzeugter $\mathbb{C}\{z\}$ -Moduln endlichdimensionale $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind. Dies gilt für $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ -Torsionsmoduln M nicht mehr; und es gibt

Beispiele für

- a) abgeschlossene Unterräume $A, B \subset M$, so daß $A+B$ nicht mehr abgeschlossen ist, also der Quotient $M/A+B$ nicht hausdorffsch ist. Dies zeigt die Schwierigkeit bei der Konstruktion von Kokernen für die Summe $f + g$ zweier $\mathbb{C}$ -linearer stetiger Abbildungen f und g zwischen analytischen Moduln.
- b) nicht topologisch direkt komplementierbare Durchschnitte $U \cap V$ topologisch direkt komplementierbarer Unterräume $U, V \subset M$, was die Schwierigkeit bei der Konstruktion topologisch direkt komplementierbarer Kerne zeigt.

Schließlich zeigt ein weiteres Beispiel, daß auch die Konstruktion topologisch direkter Komplemente bestimmter Unterräume mittels des Gauertischen Divisionssatzes keine weiterführenden Ergebnisse bringt.

Herrn Prof. Dr. K. Wolffhardt danke ich herzlich für die Ausgabe des Themas und seine ständige Betreuung meiner Arbeit. Ich danke auch Herrn Prof. Dr. H. W. Schuster für so manchen für mich wertvollen Hinweis.

0. Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit nötigen Begriffe eingeführt, soweit sie nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können.

Außerdem werden Sätze und Lemmata zusammengestellt, die später verwendet werden und von grundlegender Art sind.

0.1 DFS- und DFN-Räume

Die Grundbegriffe der Theorien der topologischen und lokalkonvexen Vektorräume werden vorausgesetzt (siehe z.B. [F-W], [Kö], [Schae]). Alle in dieser Arbeit vorkommenden Vektorräume sind Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Die $\mathbb{C}$ -Vektorraumdimension eines Vektorraums V wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

(0.1.1) Definition: Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen lokalkonvexen Vektorräumen V und W heißt:

1) kompakt, wenn es eine Nullumgebung U von V gibt, so daß $f(U)$ in W relativ kompakt ist.

2) nuklear, wenn es gibt

(a) eine Folge $\{a_n\} \subset V'$, die gleichstetig ist, d.h. für die es eine stetige Halbnorm p auf V gibt mit $| \langle a_n, x \rangle | \leq p(x)$ für alle $x \in V$,

(b) eine beschränkte Folge $\{y_n\} \subset W$ und

(c) eine Folge $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$,

so daß $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle a_n, x \rangle y_n$ für alle $x \in V$ gilt.

(0.1.2) Bemerkung : 1) Kompakte und nukleare Abbildungen sind stetig.

2) Zusammensetzungen von nuklearen Abbildungen mit stetigen Abbildungen sind wieder nuklear.

3) Nukleare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ sind kompakt, falls W vollständig ist.

Beweis: [F-W] § 19 1.2, § 21 1.2 & 1.5

(0.1.3) Definition : 1) Ein abzählbares kompaktes (nukleares)
injektives induktives System von Banach-Räumen ist eine Familie

$(E_n, f_{k,n})_{\substack{k,n \in \mathbb{N}_0 \\ k < n}}$ von Banach-Räumen zusammen mit injektiven

linearen kompakten (nuklearen) Abbildungen $f_{k,n}: E_k \rightarrow E_n$,

so daß $f_{m,n} \circ f_{k,m} = f_{k,n}$ für $k < m < n$ gilt.

2) Ein induktiver Limes $E := \varinjlim E_n$ eines solchen Systems ist der Quotient der direkten Summe $F := \bigoplus_n E_n$ nach dem Unterraum H von F , der von den Bildern der linearen Abbildungen $g_k - g_n \circ f_{k,n}$ mit $k, n \in \mathbb{N}_0, k < n$ erzeugt ist (wobei $g_n: E_n \rightarrow F$ die kanonischen Inklusionen seien), versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, die die Injektionen $E_n \rightarrow E$ stetig macht.

3) Ein topologischer Vektorraum, der induktiver Limes eines abzählbaren kompakten (nuklearen) injektiven induktiven Systems von Banach-Räumen ist, heißt DFS- (DFN-) Raum.

(0.1.4) Satz : Sei $E = \varinjlim E_n$ ein DFS-(DFN-)Raum. Dann gilt :

1) E trägt die feinste Topologie, die die Inklusionen $E_n \subset E$ stetig macht, d.h. die Finaltopologie bzgl. dieser Inklusionen.

2) E ist ein lokalkonvexer Vektorraum, ein Montelraum, reflexiv, und vollständig.

3) Ist $U \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum von E , dann gilt, daß $U = \varinjlim U \cap E_n$ und $E/U = \varinjlim E_n / U \cap E_n$ ist.

4) Eine Folge $\{x_n\} \subset E$ konvergiert in E genau dann, wenn es ein $k \geq 0$ gibt, so daß $\{x_n\} \subset E_k$ ist und als Folge in E_k konvergiert.

Beweis: 1) [F-W] § 25 1.5 2) [F-W] § 25 1.4 & 2.9, § 26 2.3

3) [F-W] § 25 1.2, [G-R 1] I § 8 Satz 1 4) [F-W] § 25 2.10

(0.1.5) Satz : 1) Es gilt der Satz von der offenen Abbildung für DFS-Räume, d.h. ist $f: E \rightarrow F$ eine stetige surjektive lineare Abbildung zwischen DFS-Räumen, so ist f offen.

2) Es gilt der Satz vom abgeschlossenen Graphen für DFS-Räume, d.h. ist $f: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung zwischen DFS-Räumen, so ist f genau dann stetig, wenn $\text{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F$ abgeschlossen ist in der Produkttopologie von $E \times F$.

Beweis : 1) & 2) [Gro] IV 5. Théorème 2

(0.1.6) Lemma : Für eine kurze exakte Folge von DFS-Räumen

$S : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0$ sind äquivalent:

i) S zerfällt, d.h. es gibt lineare stetige Abbildungen $t : F \longrightarrow E$ und $s : G \longrightarrow F$ mit $toi = id_E$, $tos = 0$, $pos = id_G$, und $iot + sop = id_F$.

ii) i hat eine stetige lineare Linksinverse.

iii) p hat eine stetige lineare Rechtsinverse.

Beweis : [Ju] Lemma 3.4

Der Dualraum V' eines lokalkonvexen Vektorraums V sei im weiteren immer mit der starken Topologie versehen.

(0.1.7) Definition : 1) Ein Untervektorraum U eines lokalkonvexen Vektorraums E heißt direkt komplementierbar in E , wenn es einen Untervektorraum V in E gibt, so daß $E = U \oplus V$ ist, wenn $U \oplus V$ die Produkttopologie der von E auf U bzw. V induzierten Topologien trägt.

2) Eine stetige lineare Abbildung $f : E \longrightarrow F$ zwischen DFS-Räumen heißt zerfallend (bzw. zerfällt), wenn $Ke(f)$ und $Bi(f)$ direkt komplementierbare Unterräume von E bzw. F sind.

(0.1.8) Satz : 1) Ist E ein DFS-Raum, so ist E' ein FS-Raum, d.h. ein Fréchet-Schwartz-Raum.

2) Ist $S : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von FS- (DFS-) Räumen, so ist $S : 0 \longrightarrow G' \xrightarrow{g'} F' \xrightarrow{f'} E' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von DFS- (FS-) Räumen.

Beweis : [F-W] § 26 2. und [B-S] I § 1 Corollary 1.4.

0.2 Nukleare Räume

Literatur : [Pie]

(0.2.1) Definition : 1) Für eine Halbnorm p eines lokalkonvexen Vektorraums E ist $\ker p := \{x \in E : p(x) = 0\}$ ein Untervektorraum, und $E/\ker p$ wird mit $\|\bar{x}\| := p(x)$ für $x \in E$ ein normierter Raum. Die Vervollständigung $(\widehat{E/\ker p})$ von $E/\ker p$ bezüglich der von $\|\cdot\|$ induzierten Topologie heißt die Lokalisierung von E nach p und wird mit B_p bezeichnet.

2) Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum, dessen Topologie durch ein Halbnormensystem $(p_i)_{i \in I}$ gegeben sei.

E heißt nuklear, wenn es zu jedem $i \in I$ ein $j \in I$ gibt mit $p_i \leq p_j$, so daß die kanonische Einschränkungabbildung $B_{p_j} \rightarrow B_{p_i}$, $x + \ker p_j \mapsto x + \ker p_i$ nuklear ist.

3) Ein Fréchet-Raum, der nuklear ist, wird als FN-Raum bezeichnet.

(0.2.2) Satz : 1) Jeder Untervektorraum eines nuklearen Raums ist nuklear.

2) Jeder Quotientenraum eines nuklearen Raums nach einem abgeschlossenen Untervektorraum ist ein nuklearer Raum.

3) Das topologische Produkt beliebig vieler nuklearer Räume ist nuklear.

4) Die topologische Summe abzählbar vieler nuklearer Räume ist nuklear.

Beweis : [Pie] 5.1.1, 5.1.3, 5.2.1, 5.2.2

(0.2.3) Satz : 1) Ist E ein DFN-Raum, so ist E' ein FN-Raum.

2) DFN-Räume sind nuklear.

Beweis : [F-W] § 27 3.7 & 3.8

(0.2.4) Definition : Sind V, W lokalkonvexe Vektorräume, dann kann das Tensorprodukt $V \otimes W$ auf verschiedene Weisen topologisiert werden:

Seien $(p_i)_{i \in I}$ bzw. $(q_j)_{j \in J}$ Halbnormensysteme, die die Topologie von V bzw. W erzeugen.

Sei für $z \in V \otimes W$

$$\pi_{ij}(z) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n p_i(x_k) q_j(y_k) : z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, x_k \in V, y_k \in W \right\}$$

Die von diesen Halbnormen $(\pi_{ij})_{i \in I, j \in J}$ erzeugte Topologie heißt π -Topologie, das Tensorprodukt von V und W , versehen mit dieser Topologie, wird mit $V \otimes_{\pi} W$ bezeichnet, die Vervollständigung von $V \otimes_{\pi} W$ mit $V \hat{\otimes}_{\pi} W$.

Die π -Topologie ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf $V \otimes W$, so daß die kanonische bilineare Abbildung $V \times W \rightarrow V \otimes W$ stetig ist ([Schae] III 6.1 & 6.3)

Für $z \in V \otimes W$ ist der Ausdruck

$$\varepsilon_{ij}(z) := \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n f(x_k) g(y_k) \right| : f \in U_{p_i}^o, g \in U_{q_j}^o \right\} \text{ unabhängig}$$

von der Wahl der Darstellung $z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$.

Dabei sei für einen lokalkonvexen Vektorraum E und eine Teilmenge $M \subset E$ $M^o := \{ f \in E' : |f(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in M \}$ die Polare von M , und für eine stetige Halbnorm q auf E bezeichne $U_q := \{ x \in E : q(x) \leq 1 \}$ die zugehörige abgeschlossene Nullumgebung.

Die von den Halbnormen $(\varepsilon_{ij})_{i \in I, j \in J}$ erzeugte Topologie heißt ε -Topologie; $V \otimes W$ versehen mit dieser Topologie wird mit $V \otimes_{\varepsilon} W$, seine Vervollständigung mit $V \hat{\otimes}_{\varepsilon} W$ bezeichnet. Die ε -Topologie ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Mengen der Form $M \otimes N$, wobei $M \subset V'$ und $N \subset W'$ Mengen von gleichstetigen Linearformen sind ([Schae] III 6.5).

Im allgemeinen ist die $\mathcal{T}$ -Topologie feiner als die $\mathcal{E}$ -Topologie ([Pie] 7.1.3), für nukleare Räume gilt jedoch ([Pie] 7.3.3):

(0.2.5) Satz: Ein lokalkonvexer Vektorraum V ist genau dann nuklear, wenn für alle lokalkonvexen Räume W gilt: $V \otimes_{\mathcal{E}} W = V \otimes_{\mathcal{T}} W$.

Beim Tensorprodukt mit einem nuklearen Raum kann also auf die Angabe der Topologie verzichtet und kurz $V \otimes W$ bzw. $V \hat{\otimes} W$ geschrieben werden.

0.3 Analytische Algebren und endlich erzeugte Moduln über analytischen Algebren.

Für die Grundbegriffe der Theorie der analytischen Algebren sei auf [G-R 1] verwiesen. Im folgenden wird aus Bezeichnungsgründen auf einige Grundbegriffe und Grundtatsachen eingegangen.

(0.3.1) Definition: 1) Sei

$\mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_n \rangle := \{ f : f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} a_{\mu} z^{\mu}, a_{\mu} \in \mathbb{C} \}$ die $\mathbb{C}$ -Algebra der formalen Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$,

wobei für $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ durch $z^{\mu} := z_1^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_n}$ die übliche vereinfachende Schreibweise eingeführt sei.

Für $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ und $f \in \mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ sei

$\|f\|_t := \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} |a_{\mu}| t^{\mu} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und

$B_t := \{ g \in \mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_n \rangle : \|g\|_t < +\infty \}$.

2) Die $\mathbb{C}$ -Unteralgebra $R_n := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+^n} B_t$ von $\mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ heißt $\mathbb{C}$ -Algebra der konvergenten Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$.

3) Jede $\mathbb{C}$ -Restklassenalgebra $A := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} / \mathcal{A}$ einer $\mathbb{C}$ -Algebra konvergenter Potenzreihen $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ nach einem Ideal $\mathcal{A} \subsetneq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ heißt analytische Algebra.

4) Ein $\mathbb{C}$ -Algebrahomomorphismus $h : A \rightarrow B$ zwischen analytischen Algebren heißt analytischer Homomorphismus.

5) AN_0 bezeichne die von den analytischen Algebren und den analytischen Homomorphismen gebildete Kategorie.

6) Die zu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ für ein $n \geq 0$ isomorphen analytischen Algebren heißen regulär.

(0.3.2) Bemerkung : 1) Analytische Algebren sind noethersch und lokal, das maximale Ideal einer analytischen Algebra A sei mit $\mathfrak{M}_A$ oder, falls keine Verwechslungen möglich sind, mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

2) Analytische Homomorphismen $h : A \rightarrow B$ sind lokal, d.h. es gilt $h(\mathfrak{M}_A) \subset \mathfrak{M}_B$.

3) In der Kategorie AN_0 existieren endliche Fasersummen.

Die Fasersumme zweier Homomorphismen $A \xleftarrow{h} C \xrightarrow{f} B$ ist das analytische Tensorprodukt $A \bar{\otimes}_C B$ (siehe [G-R 1] III § 5).

Ist $C = \mathbb{C}$ so schreibe statt $A \bar{\otimes}_{\mathbb{C}} B$ einfach $A \bar{\otimes} B$.

(0.3.3) Definition : 1) Sei A eine analytische Algebra. Ein (endlich erzeugter) A -Modul M heißt (endlicher) analytischer A -Modul.

2) Ist M ein endlicher analytischer A -Modul, so ist

$\text{Ann}_A M := \{a \in A : a \cdot m = 0 \text{ für alle } m \in M\}$ ein Ideal in A , das Annulatorideal von M in A .

Man kann M in kanonischer Weise als Modul über $A/\text{Ann}_A M$ auffassen.

3) Die Kategorie, die von den endlichen analytischen A -Moduln und den A -Modulhomomorphismen gebildet wird, wird mit $A\text{-MOD}$ bezeichnet.

4) Ein analytischer Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ heißt endlich, wenn B als A -Modul endlich ist.

5) Seien A und B analytische Algebren, M ein endlicher A -Modul und N ein endlicher B -Modul.

Dann heißt $M \bar{\otimes}_A (A \bar{\otimes} B) \otimes_B N$ das analytische Tensorprodukt von M und N über A und B (siehe [G-R 1] III § 5).

(0.3.4) Definition : 1) Eine analytische Algebra A hat die Krulldimension $\dim_A(A) := n$, wenn es eine Primidealkette

$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A$ der Länge n , aber keine längere gibt.

2) Ein endlicher analytischer A -Modul $M \neq 0$ hat die Krulldimension $\dim_A(M) := n$, wenn mit $\bar{A} := A/\text{Ann}_A(M)$ gilt: $\dim_{\bar{A}}(\bar{A}) = n$.

Für $M = 0$ wird $\dim_A(M) := -1$ gesetzt.

3) Sei $M \neq 0$ ein endlicher analytischer A -Modul. Eine Folge $(a_1, \dots, a_n)$ von Elementen $a_i \in \mathcal{M}_A$ heißt M -Folge, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ die Multiplikationshomomorphismen

$$a_i : M/(a_1 M + \dots + a_{i-1} M) \longrightarrow M/(a_1 M + \dots + a_{i-1} M)$$

injektiv sind.

M hat die Tiefe (oder Profondeur) $\text{prof}_A(M) := n$, wenn es eine M -Folge mit n Elementen, aber keine mit mehr Elementen gibt.

Es ist stets $\text{prof}_A(M) \leq \dim_A(M)$ und die Differenz $\dim_A(M) - \text{prof}_A(M)$ wird mit $\text{coprof}_A(M)$ bezeichnet.

(0.4.4) Satz : Ist $h : A \longrightarrow B$ endlicher analytischer Homomorphismus und ist $M \neq 0$ ein endlicher B -Modul, dann gilt:

$$\dim_A(M) = \dim_B(M) \quad \text{und} \quad \text{prof}_A(M) = \text{prof}_B(M).$$

Beweis : [G-R 1] II § 5.1 Satz 2 & III § 1.3 Satz 6

(0.3.5) Definition : Ein Ideal $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ heißt

$(z_{k+1}, \dots, z_n)$ - allgemein, falls

$$V(\mathcal{M}) \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} : z_1 = \dots = z_k = 0\} = \emptyset$$

als Gleichung über Mengenkeime in $0 \in \mathbb{C}^n$ gilt.

(0.3.6) Bemerkung : Ein Ideal $\mathcal{M} \subsetneq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, für das

$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}/\mathcal{M}$ die Krulldimension k hat, ist nach einer

eventuellen Koordinatentransformation $(z_{k+1}, \dots, z_n)$ - allgemein.

Dabei kann die eventuelle Koordinatentransformation linear gewählt werden.

(0.3.7) Satz : Sei $\mathcal{M} \subsetneq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ ($z_{k+1}, \dots, z_n$) - allgemein,

dann ist $h := \text{poi}$:

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} \xrightarrow{i} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} / \mathcal{M}$$

endlich.

Beweis : [Fo] § 9 Satz 8 & § 11 Satz 4

(0.3.8) Korollar (Noethersches Normalisierungslemma) :

Sei A eine analytische Algebra der Krulldimension $\dim_A(A) = k$.

Dann gibt es einen endlichen analytischen Monomorphismus

$$h : \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow A .$$

(0.3.9) Definition : Sei A eine analytische Algebra. Ein Ideal

$\mathcal{M} \subsetneq A\{z_1, \dots, z_n\} := A \bar{\otimes} \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ heißt

$(z_{k+1}, \dots, z_n)$ - allgemein , wenn $\mathcal{M} / \mathcal{M}_A \mathcal{M} \subsetneq \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$

$(z_{k+1}, \dots, z_n)$ - allgemein ist.

(0.3.10) Satz : Ist $\mathcal{M} \subsetneq A\{z_1, \dots, z_n\}$ ($z_{k+1}, \dots, z_n$) -

allgemein, dann ist $h := \text{poi}$:

$$A\{z_1, \dots, z_k\} \xrightarrow{i} A\{z_1, \dots, z_n\} \xrightarrow{p} A\{z_1, \dots, z_n\} / \mathcal{M}$$

endlich.

Beweis : (0.3.7) & [G-R 1] III § 5.3

(0.3.11) Definition : 1) Ein analytischer A -Modul M heißt flach ,

wenn für jede exakte Sequenz $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ von A -Moduln die tensorierte Sequenz $0 \rightarrow E \otimes_A M \rightarrow F \otimes_A M \rightarrow G \otimes_A M \rightarrow 0$ exakt ist.

2) Ein analytischer Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ heißt flach , wenn B als A -Modul flach ist.

3) Ein analytischer Homomorphismus $h : A \rightarrow B$ heißt glatt , wenn B zu einer A -Algebra der Form $A\{z_1, \dots, z_n\}$ isomorph ist.

0.4 Die kanonische Topologie auf endlich erzeugten Moduln über analytischen Algebren

(0.4.1) Lemma : Sei $t \in \mathbb{R}_+^n$. Dann ist

$B_t = \{ f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} a_\mu z^\mu : \|f\|_t < +\infty \}$ vermöge der Norm $\| \cdot \|_t$ eine Banachalgebra.

Beweis : [G-R 1] I § 1 Satz 1

(0.4.2) Definition : Die feinste Topologie, für die alle Inklusionen $B_t \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, $t \in \mathbb{R}_+^n$ stetig sind, heißt die kanonische Topologie (oder Folgentopologie) auf $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$.

(0.4.3) Satz : $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ ist mit der kanonischen Topologie ein DFN-Raum.

Beweis : Sei $r = (r_0, \dots, r_n)$, $s = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_+^n$ mit $s_0 < r_0$, dann ist die Inklusion $i : B_r \subset B_s$ nuklear :

Man hat mit $p_\mu : B_r \rightarrow \mathbb{C}$, $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu z^\nu \mapsto a_\mu r^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}_0^n$,

eine Familie stetiger Funktionale mit $|p_\mu(f)| \leq \|f\|_r$, mit

$y_\mu := \frac{1}{s^\mu} z^\mu$ eine beschränkte Familie in B_s , und mit $c_\mu := \frac{s^\mu}{r^\mu}$ eine

Familie in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} |c_\mu| = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} \frac{s^\mu}{r^\mu} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{s_0}{r_0} \right)^k \right)^n < +\infty$,

so daß $f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} c_\mu p_\mu(f) y_\mu$ ist.

Ist $\{r_k\} \subset \mathbb{R}_+^n$ eine strikt monoton fallende Nullfolge, so gilt mit

$s_k := (r_k, \dots, r_k) \in \mathbb{R}_+^n$: $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} B_{s_k}$ und

nach (0.1.4) 1) stimmen die von den B_{s_k} auf $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ induzierte Limestopologie und die kanonische Topologie überein.

(0.4.9) Bemerkung : 1) Nach (0.1.4), (0.2.2), und (0.4.3) sind endliche analytische A-Moduln mit der kanonischen Topologie nukleare Räume.

2) Die Vervollständigung $M \hat{\otimes} N$ des Tensorprodukts eines endlichen analytischen A-Moduls M und eines endlichen analytischen B-Moduls N ist als topologischer Vektorraum isomorph zum analytischen Tensorprodukt $M \hat{\otimes} N$ mit der kanonischen Topologie.

Beweis : 2) mit [G-R 1] III § 5.5 Bemerkung zu Korollar 3

Folgender Spezialfall des Dualitätssatzes von Köthe-Tillmann beschreibt den starken Dualraum von $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ versehen mit der kanonischen Topologie:

(0.4.10) Satz (Toeplitz-Köthe-Tillmann) : Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ der Vektorraum der ganzen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, und $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ versehen mit der kanonischen Topologie.

Dann sind die topologischen Vektorräume $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$

vermöge der dualen Paarung $\langle f, u \rangle := \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} a_\mu b_\mu$ für

$f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} a_\mu z^\mu \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ und $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ mit der

Taylorreihe $u = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} b_\mu z^\mu$ zueinander stark dual.

Beweis : [Ti] Satz 1 ; für $n = 1$ siehe auch [Toe] § 3 Satz 1 und [Kö] § 27 4.

(0.4.11) Definition : 1) Ein topologischer Vektorraum, der als topologischer Vektorraum zu einem endlichen analytischen A-Modul mit der kanonischen Topologie isomorph ist, heißt analytischer Modul .

2) Die von den analytischen Moduln und $\mathbb{C}$ -linearen stetigen Abbildungen für alle $A \in \mathbb{A}_n$ gebildete Kategorie sei mit $\mathbb{A}nMOD$ bezeichnet.

(0.4.12) Definition und Bemerkung : 1) Sei $\mathbb{C} \llbracket z_1, \dots, z_n \rrbracket$ die $\mathbb{C}$ -Algebra der formalen Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, \dots, z_n$. Die vermöge des Vektorraumisomorphismus

$$p : \mathbb{C} \llbracket z_1, \dots, z_n \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}^{N_0^n}, \quad f = \sum_{\mu \in N_0^n} a_\mu z^\mu \mapsto (a_\mu)_{\mu \in N_0^n}$$

geliftete Produkttopologie heißt die Produkttopologie (oder Topologie der koeffizientenweisen Konvergenz) auf $\mathbb{C} \llbracket z_1, \dots, z_n \rrbracket$

2) Analog zu (0.4.5) und (0.4.7) erhält man eine Topologie auf formalen analytischen A-Moduln über formalen analytischen Algebren A, wobei die zu (0.4.4), (0.4.6), und (0.4.8) analogen Aussagen gelten. Die von diesen topologischen Vektorräumen zusammen mit den $\mathbb{C}$ -linearen stetigen Abbildungen gebildete Kategorie sei mit $\hat{ANMOD}$ bezeichnet.

Beweis : [B-Z 2] 1.1 i), 1.2 und 1.4

Der Vollständigkeit halber sei noch folgendes wichtige Resultat von J. Becker und W.R. Zame erwähnt. Es wird allerdings im folgenden nicht benutzt werden.

Definition und Satz (Becker-Zame) : 1) Eine topologische $\mathbb{C}$ -Algebra heißt DF-Algebra, wenn sie induktiver Limes von Fréchet-Algebren und lokalkonvexer Vektorraum ist.

2) Die Topologie, die eine analytische Algebra zu einer DF-Algebra macht, ist eindeutig bestimmt.

0.5 Grauert'scher Divisionssatz

Literatur : [Gr] , [Ga] , [Wo]

(0.5.1) Definition : 1) Ein Ideal von $\mathbb{N}_0^n$ ist eine Teilmenge I von $\mathbb{N}_0^n$ mit $I + \mathbb{N}_0^n \subseteq I$.

2) Eine Erzeugermenge E eines Ideals I von $\mathbb{N}_0^n$ ist eine Teilmenge von I mit $E + \mathbb{N}_0^n = I$.

3) Ein Element eines Ideals heißt minimal, wenn es minimales Element bezüglich der teilweisen Anordnung

$i \leq j : \Leftrightarrow j \in i + \mathbb{N}_0^n$ von $\mathbb{N}_0^n$ ist.

(0.5.2) Satz : Die minimalen Elemente eines Ideals in $\mathbb{N}_0^n$ bilden seine kleinste Erzeugermenge. Diese ist stets endlich.

Beweis : [Wo] § 1 Satz 1

(0.5.3) Definition : Auf $\mathbb{N}_0^n$ sei durch

$$i < j : \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (j_k - i_k) + \sum_{k=1}^n 2^{-k} \operatorname{sgn}(j_k - i_k) > 0$$

mit $\sum i := i_1 + \dots + i_n$ für $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$,

d.h. durch lexikographische Anordnung nach $(\sum i, i_1, \dots, i_n)$ eine totale Ordnung eingeführt.

Für $f = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n} c_\mu z^\mu \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ sei

$N(f) := \{ \mu \in \mathbb{N}_0^n : c_\mu \neq 0 \} \subset \mathbb{N}_0^n$ sein Newton-Diagramm.

Ist $f \neq 0$, so heißt das im Sinn der totalen Ordnung $<$ kleinste Element von $N(f)$ der privilegierte Exponent $\mu(f)$ von f und $c_{\mu(f)} z^{\mu(f)}$ das Anfangsglied von f .

Ist $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ ein Ideal, so ist

$E(\mathcal{A}) := \{ \mu(f) : f \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \}$ ein Ideal in $\mathbb{N}_0^n$ und

die kleinste Erzeugermenge $G(\mathcal{A})$ von $E(\mathcal{A})$ heißt Grenze von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{N}_0^n$.

(0.5.4) Satz (Gruert'scher Divisionssatz) : Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ ein Ideal, $G(\mathcal{M}) = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ seine Grenze in $\mathbb{N}_0^n$, und seien $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ mit $\mu(f_i) = \mu_i$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Dann gibt es zu jeder Potenzreihe $g \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ eindeutig bestimmte Potenzreihen $q_1, \dots, q_r, q_{r+1} \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ mit

$$q_i = \sum_{\mu + \mu_i \in D_i} q_{i,\mu} z^\mu \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \quad \text{und} \quad q_{r+1} = \sum_{\mu \in D_{r+1}} q_{r+1,\mu} z^\mu$$

so daß $g = \sum_{i=1}^r q_i f_i + q_{r+1}$ ist, wobei

$$D_1 := \mu_1 + \mathbb{N}_0^n, \quad D_i := (\mu_i + \mathbb{N}_0^n) \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}), \quad \text{und} \\ D_{r+1} := \mathbb{N}_0^n \setminus E(\mathcal{M}) \quad \text{sei.}$$

Die durch $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}/\mathcal{M}$,

$$g \mapsto \left(\sum_{i=1}^r q_i f_i, \bar{q}_{r+1} \right)$$

definierte Abbildung ist ein $\mathbb{C}$ -linearer Homöomorphismus bezüglich der kanonischen Topologie auf $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ und der Produkttopologie der kanonischen Topologien auf $\mathcal{M}$ bzw. $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}/\mathcal{M}$.

Beweis : [Wo] § 1 Satz 3 & Satz 5

(0.5.5) Definition : 1) Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum.

Eine Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ heißt topologische Basis von E , wenn es

für jedes $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

komplexer Zahlen gibt, so daß $x = \lim_n \sum_{k=0}^n c_k e_k$ ist.

2) Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ in der kanonischen Topologie, $E(V) := \{\mu(v) : v \in V \setminus \{0\}\}$

Eine topologische Basis $(v_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von V heißt

ausgezeichnet (oder privilegiert) bezüglich $(z_1, \dots, z_n)$,

wenn für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt : $N(v_i) \cap E(V) = \{\mu(v_i)\}$

(0.5.6) Bemerkung : Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von $\langle \mathbb{I} z_1, \dots, z_n \mathbb{I}$ mit der Produkttopologie.

Dann existiert eine topologische Basis $(v_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von V mit $N(v_i) \cap E(V) = \{\mu(v_i)\}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Sie ist eindeutig bestimmt, wenn gilt:

a) $\mu(v_i) < \mu(v_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der totalen Ordnung $<$ aus (0.5.3), und

b) z^{μ_i} ist Anfangsglied von v_i für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Beweis : Sei (h_{i_k}) eine Folge in V mit $\mu(h_{i_k}) = i_k$ und z^{i_k}

als Anfangsgliedern, so daß $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}_0} = E(V)$ ist und

$i_k < i_{k+1}$ bezüglich der totalen Ordnung $<$ aus (0.5.3).

Dann erhält man mit $f_k := \lim_1 f_{i_k, l}$, wobei induktiv

$f_{i_k, 0} := h_{i_k}$ und $f_{i_k, l} := f_{i_k, l-1} - \sum_{j \in E(V)} c_j h_j$ mit

$$f_{i_k, l-1} = z^{i_k} + \sum_{\substack{j \in E(V) \\ j > i_k}} c_j z^j + \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n \setminus E(V)} c_\mu z^\mu$$

definiert sei, eine topologische Basis mit der gewünschten Eigenschaft.

Sie ist eindeutig bestimmt : Sei (g_k) eine weitere topologische Basis mit $N(g_k) \cap E(V) = \{\mu(g_k)\}$ und den Eigenschaften a) und b).

Angenommen es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $f_{k_0} \neq g_{k_0}$. Sei zugleich k_0 die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft.

Da die Ordnung $<$ total und $\{\mu(f_k)\} = E(V) = \{\mu(g_k)\}$ ist,

folgt $f_{k_0} - g_{k_0} = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^n \setminus E(V)} a_\mu z^\mu \in V$ im Widerspruch

zur Definition von $E(V)$.

0.6 Potenzreihenräume und der Satz von Kolmogorov

Literatur : [Pie] , [Ro 2] , [Vo] , [V-W 1] , [V-W 2]

(0.6.1) Definition : Sei $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine strikt monoton wachsende Folge aus $\mathbb{R}_+$ mit $\lim_n \alpha_n = +\infty$.

Für $0 < r \leq +\infty$ sei

$$\Lambda_r(\alpha) := \{c = (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : |c|_t := \sum_n |c_n| t^{\alpha_n} < +\infty \text{ für alle } 0 < t < r\}$$

Mit den Normen $|\cdot|_t$, $0 < t < r$ ist $\Lambda_r(\alpha)$ ein Fréchet-Raum und heißt Potenzreihenraum von endlichem Typ falls $r < +\infty$ ist, und Potenzreihenraum von unendlichem Typ falls $r = +\infty$ ist.

(0.6.2) Satz : 1) Bei festem α sind alle $\Lambda_r(\alpha)$ mit $0 < r < +\infty$ isomorphe topologische Vektorräume.

2) Ein Potenzreihenraum von endlichem Typ ist niemals isomorph zu einem Potenzreihenraum von unendlichem Typ.

3) $\Lambda_r(\alpha)$ ist nuklear, falls $\lim_n \frac{\log n}{\alpha_n} = 0$ im Falle $r < +\infty$

ist, bzw. falls $\sup_n \frac{\log n}{\alpha_n} < +\infty$ im Falle $r = +\infty$ ist.

4) Ist die Folge α stabil, d.h. gilt $\sup \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_n} < +\infty$, dann ist $\Lambda_r(\alpha)$ stabil in folgendem Sinne :

$$\Lambda_r(\alpha) \cong \Lambda_r(\alpha) \oplus \Lambda_r(\alpha) \quad \text{als topologische Vektorräume.}$$

Beweis : [Pie] 6.1.2, 6.1.5, 9.3.2, 9.3.4

(0.6.3) Beispiel : Für $\alpha = (\sqrt[n]{k})_{k \in \mathbb{N}}$ gilt

1) $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist als topologischer Vektorraum isomorph zu $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$, dem Vektorraum der ganzen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

2) $\Lambda_1(\alpha)$ ist als topologischer Vektorraum isomorph zu $\mathcal{O}(P(0,1))$, dem Vektorraum der holomorphen Funktionen auf dem Einheitspolyzyylinder in $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

Beweis : [Ro 2] VIII § 2 Prop. 1 & § 3 Lemma 1

(0.6.4) Satz (A.H. Kolmogorov) : Seien $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ und $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ die Vektorräume der auf $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ganzen holomorphen Funktionen mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

Dann gilt : Sind $\mathcal{O}(\mathbb{C}^m)$ und $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ isomorphe topologische Vektorräume, so ist $m = n$.

Beweis : [Ro 2] VIII § 3 Prop. 12 oder [Ro 1]

(0.6.5) Satz : Ist $0 \rightarrow \bigwedge_{\infty}(\alpha) \rightarrow E \rightarrow \bigwedge_{\infty}(\beta) \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von FN-Räumen und sind $\bigwedge_{\infty}(\alpha)$ und $\bigwedge_{\infty}(\beta)$ stabil, dann zerfällt die Sequenz und es gilt :

$E \cong \bigwedge_{\infty}(\alpha) \oplus \bigwedge_{\infty}(\beta) \cong \bigwedge_{\infty}(\gamma)$ mit $\gamma_n := \min(\alpha_n, \beta_n)$ als topologische Vektorräume.

Beweis : [Vo] 4.5. Corollar , [V-W 2] 1.4

(0.6.6) Satz : Für zwei Potenzreihenräume $\bigwedge_{\infty}(\alpha)$ und $\bigwedge_{\infty}(\beta)$ von unendlichem Typ sind äquivalent:

i) $\bigwedge_{\infty}(\beta)$ ist als topologischer Vektorraum isomorph zu einem Unterraum oder Quotientenraum oder direkt komplementierbaren Unterraum von $\bigwedge_{\infty}(\alpha)$.

ii) Es gilt : $\sup_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} < +\infty$.

Beweis : [V-W 2] 5.

0.7 Komplexe Räume

Literatur : [Fi] , [K-K]

Die Grundlagen der Garbentheorie werden vorausgesetzt, sie finden sich z.B. in [Ku] .

Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe über dem topologischen Raum X und $U \subset X$ offen, dann wird die Menge der Schnitte in $\mathcal{G}$ über U mit $\mathcal{G}(U)$ oder mit $H^0(U, \mathcal{G})$ bezeichnet.

$H^q(U, \mathcal{G})$ bezeichnet die q -te Kohomologiegruppe.

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ ist die Garbe der holomorphen Funktionskeime in $\mathbb{C}^n$.

(0.7.1) Definition : 1) Ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum X ist ein Paar $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$, wobei $|X|$ ein topologischer Raum und $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von $\mathbb{C}$ -Algebren über $|X|$ ist.

2) Ist $U \subset |X|$ offen und $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$, so ist $(U, \mathcal{O}_U)$ wieder ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum.

$(U, \mathcal{O}_U)$ wird ein offener Unterraum von X genannt.

3) Sind X und Y $\mathbb{C}$ -algebrierte Räume, und ist $f : |X| \rightarrow |Y|$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul, dann ist die durch $U \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ für $U \subset |Y|$ offen definierte Prägarbe eine Garbe auf $|Y|$. Sie wird mit $f_*\mathcal{F}$ bezeichnet, und heißt Bildgarbe (oder direktes Bild) von $\mathcal{F}$.

4) Ein Morphismus zwischen $\mathbb{C}$ -algebrierten Räumen X und Y ist ein Paar $f = (|f|, \tilde{f})$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ und einem $\mathbb{C}$ -Algebrahomomorphismus $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_*\mathcal{O}_X$, wobei $|f|_*\mathcal{O}_X$ das direkte Bild von $\mathcal{O}_X$ ist.

Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul, so kann $|f|_*\mathcal{F}$ auch als $\mathcal{O}_Y$ -Modul aufgefaßt werden.

Anstelle von $|f|_*\mathcal{F}_X$ schreibt man auch einfach $f_*\mathcal{F}_X$.

5) Ist $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul

und $x \in |X|$, so heißt $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in V \subset |X| \text{ offen}} \mathcal{F}(V)$

der Halm von $\mathcal{F}$ in x .

Ist $U \subset |X|$ offen, $x \in U$ und $f \in \mathcal{F}(U)$, dann wird das Bild von f unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ mit f_x bezeichnet. f_x heißt der Keim von f in x .

Wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ eine lokale Algebra ist (das gilt für komplexe Räume immer, siehe (0.7.6)) und $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal bezeichnet, dann ist die Restklasse $f_x + \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ eine komplexe Zahl. Sie wird der Wert von f in x genannt und mit $f(x)$ bezeichnet.

6) Sei $f: X \rightarrow Y$ Morphismus zwischen $\mathbb{C}$ -algebrierten Räumen. Die topologische Urbildgarbe eines $\mathcal{O}_Y$ -Moduls $\mathcal{G}$ wird mit $f^{-1}\mathcal{G}$ bezeichnet und hat die Eigenschaft $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$ für alle $x \in X$.

$f^{-1}\mathcal{G}$ ist ein $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul.

Für $x \in X$ kann man einen $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus

$\tilde{f}_x: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ als Komposition der kanonischen Homomorphismen $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ definieren.

Der Homomorphismus $\tilde{f}: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ induziert weiter einen Homomorphismus $\tilde{f}: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ mit $\tilde{f}_x = \tilde{f}_x$ für alle $x \in X$ und so kann $\mathcal{O}_X$ als $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -Modul aufgefaßt werden.

Ist nun $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Y$ -Modul, so wird das analytische Urbild $f^*\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}$ bezüglich f folgendermaßen definiert:

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

Es gilt: f_* ist links- und f^* ist rechtsexakt.

(0.7.2) Definition : 1) Sei $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum, Eine $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt :

a) von endlichem Typ, wenn es zu jedem $x \in |X|$ eine offene Umgebung $U \subset |X|$ von x und einen Epimorphismus $\mathcal{O}_U^k \rightarrow \mathcal{F}|_U$ gibt.

b) kohärent, wenn gilt :

i) $\mathcal{F}$ ist von endlichem Typ

ii) Für jedes offene $U \subset |X|$ und jeden Homomorphismus

$$\mathcal{O}_U^k \rightarrow \mathcal{F}|_U \text{ ist der Kern von endlichem Typ.}$$

Die Menge der kohärenten $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben wird mit $\text{Coh}(X)$ bezeichnet.

2) Ist X ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul, dann heißt $\text{Tr } \mathcal{F} := \{x \in |X| : \mathcal{F}_x \neq 0\}$ der Träger von $\mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{F}$ von endlichem Typ, dann ist $\text{Tr } \mathcal{F}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $|X|$ ([Fi] 0.5).

(0.7.3) Lemma : 1) Sei X ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum.

a) Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ein Untermodul, so ist $\mathcal{G}$ genau dann kohärent, wenn $\mathcal{G}$ von endlichem Typ ist.

b) Sind in der exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ von $\mathcal{O}_X$ -Moduln zwei der Moduln kohärent, so ist es auch der dritte.

2) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}_X$ -Moduln, $p \in X$ und $b : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ ein Monomorphismus (bzw. ein Epimorphismus). Dann gibt es eine offene Umgebung U von p und einen Monomorphismus (bzw. Epimorphismus)

$\beta : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$, so daß $\beta_p := \varinjlim_{\substack{V \subset U \\ \text{offen}}} \beta_V = b$ ist.

Beweis : [Fi] 0.6 & 0.9

(0.7.4) Definition : 1) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}_U$ ein kohärentes Ideal, $|Y| := \text{Tr}(\mathcal{O}_U/\mathcal{M})$ und $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_U/\mathcal{M})|_{|Y|}$.

Dann heißt $Y := (|Y|, \mathcal{O}_Y)$ ein lokales Modell.

2) Ein komplexer Raum ist ein $\mathbb{C}$ -algebrierter Raum $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ so daß gilt:

a) $|X|$ ist hausdorffsch

b) Zu jedem $x \in |X|$ gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Isomorphismus von $(U, \mathcal{O}_U)$ auf ein lokales Modell.

(0.7.5) Satz : Ist X ein komplexer Raum, so ist $\mathcal{O}_X$ kohärent.

Beweis : [Fi] 0.14

(0.7.6) Satz : Ist $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum und $x \in |X|$, dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ eine analytische Algebra.

(0.7.7) Definition : 1) Ein abgeschlossener Unterraum eines komplexen Raums ist ein Paar $(|Y|, \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \mid |Y|)$, wobei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe und $|Y| := \text{Tr}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ ist.

Jeder abgeschlossene Unterraum eines komplexen Raums ist wieder ein komplexer Raum.

Lokale Modelle sind abgeschlossene Unterräume von offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$.

2) Eine Teilmenge $M \subset |X|$ eines komplexen Raums heißt analytisch, wenn es eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ gibt, so daß $M = \text{Tr}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ ist.

Analytische Mengen sind also die abgeschlossenen Unterräumen von X zugrundeliegenden topologischen Räume.

3) Seien $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ und $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$ komplexe Räume. Eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist ein Paar $f = (|f|, \tilde{f})$, wobei $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ eine stetige Abbildung und $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \rightarrow |f|_* \mathcal{O}_X$ ein Homomorphismus von Garben von $\mathbb{C}$ -Algebren ist.

f heißt biholomorph (oder wie bei $\mathbb{C}$ -algebrierten Räumen ein Isomorphismus), wenn $|f|$ ein Homöomorphismus und $\tilde{f}$ ein Isomorphismus ist. f heißt Einbettung, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum Z von Y (mit der kanonischen Injektion $i : Z \rightarrow Y$) und eine biholomorphe Abbildung $g : X \rightarrow Z$ mit $i \circ g = f$ gibt.

(0.7.8) Definition und Satz : Sei $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum.

1) Die durch $\mathcal{N}(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) : \text{Zu jedem } x \in U \text{ existiert ein } k \geq 0 \text{ mit } f_x^k = 0\}$

definierte Garbe $\mathcal{N}$ heißt Garbe der nilpotenten Elemente von $\mathcal{O}_X$.

2) $\mathcal{N}$ ist eine kohärente $\mathcal{O}_X$ -Modulgarbe.

3) $X_{\text{red}} := (|X|, \mathcal{O}_X/\mathcal{N})$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X und heißt Reduktion von X .

4) Ein komplexer Raum heißt reduziert, wenn $X = X_{\text{red}}$ ist.

(0.7.9) Definition : 1) Sei $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum,
 $A := \mathcal{O}_X(|X|)$. X heißt

a) holomorph-konvex bzw. schwach-holomorph-konvex, wenn für
 jedes Kompaktum $K \subset |X|$ die A -konvexe Hülle

$$\hat{K}_A := \{x \in |X| : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ für alle } f \in A\}$$

ebenfalls kompakt ist bzw. kompakte Zusammenhangskomponenten hat,

b) holomorph-separabel, wenn es zu zwei verschiedenen Punkten
 $x_1, x_2 \in |X|$ ein $f \in A$ gibt mit $f(x_1) \neq f(x_2)$,

c) holomorph-regulär, wenn für jedes $x \in |X|$ die Menge
 $\{f_x \in \mathcal{O}_{X,x} : f \in A\}$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ erzeugt,

d) holomorph-ausbreitbar, wenn es zu jedem $x \in |X|$ eine
 offene Umgebung $U \subset |X|$ von x gibt, so daß gilt:
 $\{y \in U : f(y) = f(x) \text{ für alle } f \in A\} = \{x\}$.

Aus b) oder c) folgt d); ist a) erfüllt, so sind b), c) und d)
 äquivalent; dies folgt aus [Fi] 0.38

2) Ein komplexer Raum heißt ein Steinscher Raum, wenn er
 holomorph-konvex und holomorph-separabel ist.

(0.7.10) Theoreme A & B : Sei $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ ein Steinscher Raum
 und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann gilt:

A) Für jedes $x \in |X|$ erzeugt $\{f_x \in \mathcal{F}_x : f \in \mathcal{F}(X)\}$
 $\mathcal{F}_x$ als $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul.

B) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$.

Beweis : [Fi] 0.37 ; [G-R 2] IV § 4, 5.

(0.7.11) Korollar : Ein komplexer Raum ist Steinsch genau dann, wenn
 für jede exakte Sequenz kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Moduln $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$
 gilt: $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$ ist auch exakt.

Beweis : [Fi] 0.37

(0.7.12) Satz : Jeder Punkt eines komplexen Raumes besitzt eine
 Umgebungsbasis aus Steinschen Räumen.

Beweis : [K-K] 51.5 Corollary

(0.7.13) Definition : Sei $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$ -Modul.

- 1) Die holomorphe Abbildung f heißt flach in $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ als Modul über $\mathcal{O}_{S,f(x)}$ flach ist.
- 2) $\mathcal{F}$ heißt f-flach in $x \in X$, wenn $\mathcal{F}_x$ ein flacher $\mathcal{O}_{S,f(x)}$ -Modul ist.
- 3) f heißt flach, wenn f flach ist in x für alle $x \in X$.
- 4) $\mathcal{F}$ heißt f-flach, wenn $\mathcal{F}$ f-flach ist in x für alle $x \in X$.

0.8 Fréchet-Garben

Literatur : [G-R 2] , [K-K]

Zur Einfachheit werde angenommen, daß jeder komplexe Raum abzählbare Topologie habe.

(0.8.1) Definition : Eine Garbe $\mathcal{F}$ von Vektorräumen auf einem topologischen Raum T mit abzählbarer Topologie heißt Fréchet-Garbe, wenn gilt:

- i) $\mathcal{F}(U)$ ist ein Fréchet-Raum für alle offenen Mengen $U \subset T$,
 - ii) für jedes $V \subset U \subset T$ ist die Restriktion $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ offen offen
- stetig.

(0.8.2) Satz und Definition : Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$. Es gibt genau eine Fréchettopologie auf $\mathcal{F}(X)$, die kanonische Topologie, so daß alle Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}_x$, $s \mapsto s_x$, $x \in X$ stetig sind, wenn $\mathcal{F}_x$ die kanonische Topologie (siehe 0.4) trägt.

Beweis : [G-R 2] V § 6 Satz 4, Satz 5

(0.8.3) Folgerung : Sei X ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$. Dann ist $\mathcal{F}$ mit der kanonischen Topologie auf den Schnittmoduln eine Fréchet-Garbe.

Beweis : [G-R 2] V § 6 Satz 6 a)

(0.8.4) Satz : 1) Sei $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus kohärenter $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben über dem komplexen Raum X .

Dann ist $\beta(X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ stetig.

2) Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, so ist $f^*(\mathcal{G}) : \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ stetig.

Beweis : [K-K] 55.6

(0.8.5) Satz : Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ offen, dann ist die Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathcal{O}(X)$ die kanonische Topologie.

Beweis : [K-K] 55.2

(0.8.6) Satz : Sei X ein komplexer Raum und $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$.

Dann ist $\mathcal{F}(X)$ ein nuklearer Fréchet-Raum.

Beweis : [D-V] exposé I 4. prop.2

(0.8.7) Satz : Seien X und Y komplexe Räume, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, $\mathcal{G} \in \text{Coh}(Y)$, und seien $p : X \times Y \longrightarrow X$ und $q : X \times Y \longrightarrow Y$ die Projektionen.

Sei $\mathcal{H} := p^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} q^* \mathcal{G}$ das äußere Tensorprodukt von

$\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Dann gilt : $\mathcal{H}(X \times Y) = \mathcal{F}(X) \hat{\otimes} \mathcal{G}(Y)$.

Beweis : [D-V] exposé I 4.1 théorème

1. Die topologische Vektorraumstruktur analytischer Moduln

Es wird gezeigt, daß die topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume, die entstehen, wenn man endlich erzeugte nichtartinsche Moduln M über einer analytischen Algebra A mit der kanonischen Topologie versieht, die zu $\bigwedge_{\infty}(\sqrt[k]{n})$, $k = \dim_A(M)$ stark dualen topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind.

(1.1) Lemma : Seien A und B analytische Algebren, $h : A \longrightarrow B$ ein analytischer Homomorphismus, M ein endlicher B -Modul und N ein endlicher A -Modul.

Ist $p : M \longrightarrow N$ eine A -lineare, surjektive und bezüglich der kanonischen Topologien auf M und N stetige Abbildung, dann gibt es eine $\mathbb{C}$ -lineare stetige Abbildung $s : N \longrightarrow M$ mit $ps = \text{id}_N$.

Beweis : Induktion nach der Krulldimension $n = \dim_A(N)$ von N :

Der Fall $\underline{n = -1}$ bzw. $\underline{n = 0}$ ist klar, da dann N endlichdimensionaler Vektorraum ist.

Falls $\underline{n > 0}$ ist, existiert nach dem Noetherschen Normalisierungslemma (0.3.8) ein analytischer Homomorphismus φ und eine reguläre analytische Algebra $\tilde{A}$, so daß $\tilde{A} \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow A/\text{Ann}_A(N)$ eine ganze Ringerweiterung ist, die N zu einem endlichen $\tilde{A}$ -Modul macht.

Es gilt $\dim_{\tilde{A}}(\tilde{A}) = \dim_A(N)$ und wegen (0.4.8) 2) stimmt die von $\tilde{A}$ induzierte Topologie mit der von A induzierten überein.

Es sei daher ohne Einschränkung angenommen, daß A regulär ist und $\dim_A(A) = \dim_A(N)$ gilt.

Als reguläre analytische Algebra ist A ein Integritätsring mit Quotientenkörper $K := Q(A)$ und $N \otimes_A K$ ist ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Es gibt somit Elemente $n_1, \dots, n_k$ in N , deren Bilder unter der kanonischen Abbildung $N \longrightarrow N \otimes_A K$ in $N \otimes_A K$ eine Basis über K bilden. Die $n_1, \dots, n_k$ erzeugen daher einen freien A -Untermodule $F \subset N$, so daß N/F A -Torsionsmodul ist, d.h. es gilt $\dim_A(N/F) < n = \dim_A(N)$.

Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma gibt es wieder einen analytischen Homomorphismus und eine reguläre analytische Algebra R , so daß $R \longrightarrow A \longrightarrow A/\text{Ann}_A(N/F)$ eine ganze Ringerweiterung ist, N/F ein endlicher R -Modul ist, und $\dim_R(N/F) = \dim_A(N/F) < n$ gilt.

M trägt vermöge h und der Ringerweiterung $R \subset A$ eine R -Modulstruktur und $M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} N/F$ ist R -linear, surjektiv und stetig, wenn $q : N \rightarrow N/F$ die kanonische Surjektion ist.

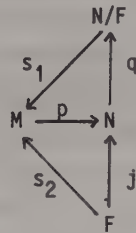
Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine $\mathbb{C}$ -lineare stetige Abbildung $s_1 : N/F \rightarrow M$ mit $(q \circ p) \circ s_1 = \text{id}_{N/F}$.

Daher zerfällt die exakte Sequenz $0 \rightarrow F \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N/F \rightarrow 0$ nach (0.1.6) als Sequenz von topologischen Vektorräumen, da $p \circ s_1$ stetige Rechtsinverse zu q ist, und es gilt $\text{id}_N = p \circ s_1 \circ q + j \circ t$ wobei $t : N \rightarrow F$ Linksinverse zu j sei.

Da F freier A -Modul ist, existiert

$s_2 : F \rightarrow M$ A -linear mit $p \circ s_2 = j$,

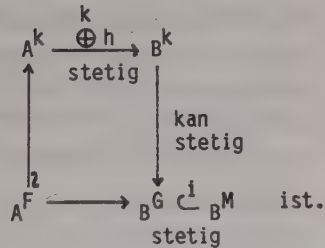
und es gilt:



s_2 ist stetig :

Sei $B^M := B \cdot s_2(n_1) + \dots + B \cdot s_2(n_k)$ der von den $s_2(n_1), \dots, s_2(n_k)$ erzeugte B -Untermodul von B^M .

Dann gilt $s_2 = \text{io} \circ \text{kano} \left(\bigoplus_{l=1}^k h \right)$, wobei



Man erhält eine Abbildung $s : N \rightarrow M$, $s = s_2 \circ t + s_1 \circ q$, die $\mathbb{C}$ -linear und stetig ist, und für die gilt:

$$p \circ s = p \circ s_2 \circ t + p \circ s_1 \circ q = j \circ t + p \circ s_1 \circ q = \text{id}_N.$$

(1.2) Korollar (siehe [Ju] Theorem 3.1.) :

Ist $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von endlichen analytischen A -Moduln, dann zerfällt sie als exakte Sequenz von topologischen Vektorräumen.

(1.3) Folgerung : Seien A und B analytische Algebren,
 M ein endlicher A -Modul mit $\dim_A(M) > 0$, und N ein endlicher
 B -Modul mit $\dim_B(N) > 0$.

Dann sind äquivalent :

- i) M und N sind mit ihren kanonischen Topologien als topologische Vektorräume isomorph.
- ii) Es gilt: $\dim_A(M) = \dim_B(N)$.

Beweis : 1. Schritt: Sei $M \neq 0$ endlicher analytischer A -Modul
 mit $\dim_A(M) = n$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, so daß
 M mit der kanonischen Topologie als topologischer
 Vektorraum zu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}^r$ isomorph ist.

Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma kann ohne Einschränkung
 angenommen werden, daß $A = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ ist. Die Aussage des
 ersten Schritts sei nun durch Induktion nach $n = \dim_A(M)$ gezeigt:
 Für $n = 0$ ist M endlichdimensionaler Vektorraum und die Aussage
 gilt trivialerweise.

Falls $n > 0$ ist und M freier A -Modul ist, ist wiederum nichts
 zu zeigen. Andernfalls gibt es einen endlichen freien A -Untermodule
 $F \subset M$, so daß $M/F \neq 0$ ein Torsionsmodul ist. Nach (1.2) ist
 $M \cong F \oplus M/F$ als topologischer Vektorraum. Nun ist nach Induktions-
 voraussetzung $M/F \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}^s$ mit $m := \dim_A(M/F) < n$ als
 topologischer Vektorraum für ein $s \in \mathbb{N}$. Weiter folgt aus (1.2),
 daß $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}$ zu $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ als
 topologischer Vektorraum für alle $k \in \mathbb{N}$ isomorph ist, da die

exakte Sequenz $(z_k) \subset \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}/(z_k)$

als Sequenz topologischer Vektorräume zerfällt und

$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_k\}/(z_k) \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$ ist.

Damit gilt : (*)

$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\} \cong \dots \cong$
 $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\} \cong \dots \cong$
 $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\} \cong$
 $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}$ als topologischer Vektorraum.

Es folgt $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}^s \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$
als topologischer Vektorraum durch Induktion nach s :

Für $s = 1$ ist dies (*) und für $s > 1$ gilt

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}^s \cong$$

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}^{s-1} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\} \cong$$

$$\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\} \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung.}$$

$$\begin{aligned} \text{Man erhält also : } M &= F \oplus M/F \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}^r \oplus \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_m\}^s \cong \\ &\cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}^r \end{aligned}$$

als topologischer Vektorraum, wobei $r := \text{rang}(F) = \dim(F/\mathfrak{m}_A F)$ ist.

Im 2. Schritt wird nun die Behauptung gezeigt :

Sei M ein endlicher analytischer A -Modul mit $\dim_A(M) = n > 0$.

Dann gilt nach dem 1. Schritt, daß $M \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}^r$ als topologischer Vektorraum für ein $r \in \mathbb{N}$.

Nach dem Dualitätssatz von Toeplitz-Köthe-Tillmann (0.4.10) folgt $M' \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)^r$ als topologischer Vektorraum und wegen der Stabilität von $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ sogar $M' \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und somit $M \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$.

Ebenso folgt für einen endlichen analytischen B -Modul N mit der Krulldimension $\dim_B(N) = n$, daß $N \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ gilt.

Sind umgekehrt M und N als topologische Vektorräume isomorph, so folgt mit $M' \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, $n = \dim_A(M) > 0$ und $N' \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^k)$,

$k = \dim_B(N) > 0$, daß $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und $\mathcal{O}(\mathbb{C}^k)$ als topologische Vektorräume isomorph sind, und somit aus dem Satz von Kolmogorov (0.6.4), daß $n = k$ ist.

(1.4) Korollar : Ist $M \neq 0$ ein analytischer Modul, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$M \cong \begin{cases} \bigwedge_{\infty} (\sqrt[n]{k})' & \text{falls } \dim(M) = \infty \\ \mathbb{C}^n & \text{falls } \dim(M) < \infty \end{cases}$$

als topologischer Vektorraum.

2. Der relative Fall

Die Zerlegung des Moduls N im Verlaufe des Beweises von Lemma (1.1) mit Hilfe des Noetherschen Normalisierungslemmas findet ihre Verallgemeinerung in der Methode der "dévissage" oder Aufbereitung eines Moduls nach Raynaud und Gruson [R-G] (siehe Kexel [Ke] und Bingener [Bi] für eine Formulierung über analytischen Algebren). Aus der damit gewonnenen Verallgemeinerung von Lemma (1.1) werden einfache Folgerungen gezogen.

Im folgenden seien stets A und B analytische Algebren, $h : A \rightarrow B$ ein analytischer Homomorphismus, $M \neq 0$ ein endlicher B -Modul und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A .

- (2.1) Definition : 1) Eine Aufbereitung $\mathcal{P}$ von M über A besteht aus
- a) einer Folge $B_r \rightarrow B_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_0 \rightarrow B$ von A -linearen analytischen Homomorphismen, so daß $A \rightarrow B_i$ glatt ist für alle $0 \leq i \leq r$
 - b) einer Folge $(\alpha_i : L_i \rightarrow M)_{0 \leq i \leq r}$ von B_i -Modulhomomorphismen mit endlichen freien B_i -Moduln $L_i \neq 0$, so daß für den induzierten B_i -Modulhomomorphismus

$$B_i : L_i \rightarrow M_i := M/(\alpha_0(L_0) + \dots + \alpha_{i-1}(L_{i-1}))$$

gilt, daß

$$B_i \otimes_{B_i} \text{id}_{K_i} : L_i \otimes_{B_i} K_i \rightarrow M_i \otimes_{B_i} K_i \quad \text{bijektiv ist,}$$

wobei K_i den Quotientenkörper $Q(B_i \otimes_A A/\mathfrak{m})$ von $B_i \otimes_A A/\mathfrak{m}$ bezeichne und

M_i endlicher B_i -Modul ist für alle $0 \leq i \leq r$.

- 2) Schreibe kurz $\mathcal{P} = (B_i, L_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq r}$,
 r heiße die Länge von $\mathcal{P}$.
- 3) $\mathcal{P}$ heiße total, wenn $B_r : L_r \rightarrow M_r$ surjektiv ist.

(2.2) Beinerkung : 1) Die Homomorphismen $L_i \otimes_A A/\mathfrak{m} \xrightarrow{B_i \otimes \text{id}_{A/\mathfrak{m}}} M_i \otimes_A A/\mathfrak{m}$ sind injektiv.

2) Es ist $s_i := \dim_{B_i \otimes_A A/\mathfrak{m}} (B_i \otimes_A A/\mathfrak{m}) = \dim_{B_i \otimes_A A/\mathfrak{m}} (M_i \otimes_A A/\mathfrak{m})$ und es gilt $s_0 > s_1 > \dots > s_r$

(2.3) Satz ([Ke] 1.7): M besitzt eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ über A einer Länge $r \leq \text{coprof}_{B/\mathcal{M}B}(M/\mathcal{M}M)$ mit $s_r = \text{prof}_{B/\mathcal{M}B}(M/\mathcal{M}M)$.

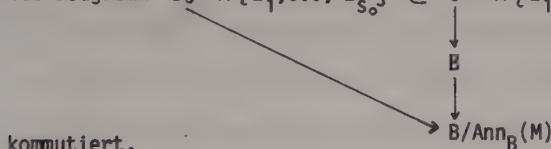
(2.4) Bemerkung: Sei $\mathbb{C} = A\{z_1, \dots, z_s\}$ eine A -glatte analytische Algebra mit einem surjektiven A -linearen analytischen Homomorphismus $f: \mathbb{C} \rightarrow B$.

Dann gibt es nach eventueller Koordinatentransformation in $z_1, \dots, z_s$ eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ von M über A wie in (2.3), so daß in der Folge $B_r \rightarrow B_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_0 \rightarrow B$ von A -linearen analytischen Homomorphismen

a) die $B_i = A\{z_1, \dots, z_{s_i}\}$ mit $s \geq s_0 > s_1 > \dots > s_r$ für alle $0 \leq i \leq r$ sind,

b) die A -linearen analytischen Homomorphismen $B_i \rightarrow B_{i-1}$ die entsprechenden Inklusionen für alle $1 \leq i \leq r$ sind und

c) das Diagramm $B_0 = A\{z_1, \dots, z_{s_0}\} \subset \mathbb{C} = A\{z_1, \dots, z_s\}$

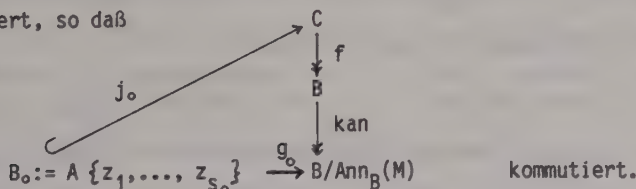


kommutiert.

Beweis: Es wird die Existenz einer totalen Aufbereitung von M über A mit den Eigenschaften a), b) und c) gezeigt und damit zugleich (2.3) bewiesen: Sei $s_0 := \dim_{B/\mathcal{M}B}(M/\mathcal{M}M)$.

Nach eventueller Koordinatentransformation in $z_1, \dots, z_s$ können wir annehmen, daß $f^{-1}(\text{Ann}_B(M))$ ein $(z_{s_0+1}, \dots, z_s)$ -allgemeines Ideal in $\mathbb{C}$ ist und f ein endlicher A -linearer analytischer Homomorphismus $g_0: A\{z_1, \dots, z_{s_0}\} \rightarrow B/\text{Ann}_B(M)$

existiert, so daß



kommutiert.

Vermöge g_0 ist nun M ein endlicher B_0 -Modul und $M/\mathcal{M}M$ ist wegen $B_0/\mathcal{M}B_0 \cong \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{s_0}\} =: R_{s_0}$ ein endlicher R_{s_0} -Modul mit $\dim_{R_{s_0}}(M/\mathcal{M}M) = s_0$.

Dann ist $M/\mathfrak{m}M \otimes_{R_{S_0}} Q(R_{S_0}) \neq 0$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $Q(R_{S_0})$, dem Quotientenkörper von R_{S_0} .

Es gibt daher in M Elemente $m_1, \dots, m_{l_0}$, deren Bilder unter der kanonischen Abbildung $M \rightarrow M/\mathfrak{m}M \rightarrow M/\mathfrak{m}M \otimes_{R_{S_0}} Q(R_{S_0})$ eine $Q(R_{S_0})$ -Vektorraumbasis bilden. Diese Elemente definieren einen B_0 -Modulhomomorphismus $B_0: L_0 := (B_0)^{1_0} \rightarrow M$, so daß

$B_0 \otimes_{B_0} \text{id}_{Q(R_{S_0})}$ bijektiv ist, und man erhält eine Aufbereitung

$\mathcal{P}' := (B_0, L_0, B_0)$ von M über A der Länge 1.

Der Beweis wird nun durch Induktion nach $n := \text{coprof}_{R_{S_0}}(M/\mathfrak{m}M) = \text{coprof}_{B/\mathfrak{m}B}(M/\mathfrak{m}M)$ zu Ende geführt:

Ist $\underline{n} = 0$, so ist $M/\mathfrak{m}M$ ein Cohen-Macaulay- R_{S_0} -Modul, also wegen $\dim_{R_{S_0}}(M/\mathfrak{m}M) = s_0$ und der Regularität von R_{S_0} ein

freier R_{S_0} -Modul, so daß die Bilder von $m_1, \dots, m_{l_0}$ unter der kanonischen Abbildung $M \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ eine Basis bilden.

$B_0 \otimes_A \text{id}_{A/\mathfrak{m}}: L_0/\mathfrak{m}L_0 \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ ist also bijektiv, und es folgt, daß für $M_1 := \text{coker } B_0$ gilt: $M_1/\mathfrak{m}M_1 = 0$, also nach dem Lemma von Nakayama $M_1 = 0$.

Ist $\underline{n} > 0$, so ist $M_1 \neq 0$ und aus der Bijektivität von $B_0 \otimes_{B_0} \text{id}_{Q(R_{S_0})}$ folgt, daß $M_1/\mathfrak{m}M_1$ ein R_{S_0} -Torsionsmodul ist, also $\dim_{R_{S_0}}(M_1/\mathfrak{m}M_1) =: s_1 < s_0$ gilt.

Aus der exakten Sequenz $0 \rightarrow L_0/\mathfrak{m}L_0 \rightarrow M/\mathfrak{m}M \rightarrow M_1/\mathfrak{m}M_1 \rightarrow 0$ erhält man durch Übergang zur exakten Ext-Sequenz ([EGA] 0 16.4.4.): $\text{prof}_{R_{S_0}}(M/\mathfrak{m}M) = \text{prof}_{R_{S_0}}(M_1/\mathfrak{m}M_1)$ und damit $\text{coprof}_{R_{S_0}}(M_1/\mathfrak{m}M_1) < n$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat der B_0 -Modul M_1 daher nach einer eventuellen Koordinatentransformation in $z_1, \dots, z_{s_0}$ eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}'' = (B'_i, L_i, \delta_i)_{0 \leq i \leq r''}$ mit

$r'' \leq \text{coprof}_{R_{S_0}}(M_1/\mathfrak{m}M_1)$ und $s_{r''} = \text{prof}_{R_{S_0}}(M_1/\mathfrak{m}M_1)$ und a), b) und c).

Da nach eventueller Koordinatentransformation in $z_1, \dots, z_{s_0}$ von C der analytische Homomorphismus $B_0 \subset C \xrightarrow{f} B \rightarrow B/\text{Ann}_B(M)$ endlich bleibt, ergeben $\mathcal{P}'$ und $\mathcal{P}''$ zusammen eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ von M über A mit den gewünschten Eigenschaften.

(2.5) Satz ([Ke] 1.9): Sei $\mathcal{P} = (B_i, L_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq r}$ eine totale Aufbereitung von M über A . Äquivalent sind:

i) M ist flacher A -Modul.

ii) $B_i: L_i \rightarrow M_i$ ist injektiv für alle $0 \leq i \leq r$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) folgt aus (2.2) Bemerkung 1) und [EGA] 0 10.2.4 durch Induktion nach i .

ii) $\Rightarrow$ i) folgt durch Induktion nach r : Falls $r = 0$ ist, ist $B_0: L_0 \rightarrow M$ ein Isomorphismus, also M ein flacher A -Modul.

Für $r > 0$ ist $\mathcal{P}' := (B_j, L_j, \alpha_j)_{1 \leq j \leq r}$ eine Aufbereitung von

M_1 der Länge $r-1$, die ii) erfüllt, so daß M_1 nach Induktionsvoraussetzung flacher A -Modul ist. Aus der exakten Sequenz

$0 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ folgt, daß auch M flacher A -Modul ist.

(2.6) Lemma: Seien A, B und C analytische Algebren,

$f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ analytische Homomorphismen,

M ein endlicher C -Modul und N ein endlicher B -Modul.

Ist N ein flacher A -Modul und $p: M \rightarrow N$ eine B -lineare, surjektive und stetige Abbildung, dann gibt es eine A -lineare, stetige Abbildung $s: N \rightarrow M$ mit $ps = \text{id}_N$.

Beweis: Mit Hilfe des relativen Normalisierungslemmas kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $f: A \rightarrow B$ glatt ist, und $\text{Ann}_B(N) = 0$ gilt.

Der Beweis wird nun durch Induktion nach $n := \dim_{B/\mathfrak{m}_B}(N/\mathfrak{m}_B N)$ geführt:

Ist $n = 0$, so ist N endlicher A -Modul und daher wegen der A -Flachheit sogar endlicher freier A -Modul. Es gibt also eine A -lineare Rechtsinverse zu p , deren Stetigkeit man wie im Beweis von (1.1) zeigt.

Für $r \geq 1$ sei eine totale Auflöserung $\mathcal{D} = (B_i, L_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq r}$ von M über A gewählt. Wegen der A -Flachheit von N sind nach (2.5) die B_0 -Modulhomomorphismen $\beta_i: L_i \rightarrow N_i$ injektiv, und man hat die exakte Sequenz $0 \rightarrow L_0 \xrightarrow{\beta_0} N \xrightarrow{\beta_1} N_1 \rightarrow 0$ endlicher B_0 -Moduln mit $\dim_{B_0/\mathfrak{m}_{B_0}}(N_1/\mathfrak{m}_{B_0}N_1) < n$.

Ist $N_1 = 0$, so ist N ein endlicher freier B_0 -Modul, und es gibt eine stetige B_0 -lineare Abbildung $s: N \rightarrow M$ mit $\text{pos} \circ s = \text{id}_N$, die insbesondere A -linear ist. Dabei folgt die Stetigkeit von s wieder wie im Beweis zu (1.1).

Ist $N_1 \neq 0$, so hat man mit $\mathcal{D} = (B_i, L_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$ eine totale Auflöserung von N_1 der Länge $r-1$, für die die B_1 -Modulhomomorphismen $\beta_i: L_i \rightarrow N_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ injektiv sind, d.h. N_1 ist ein flacher A -Modul.

Es ist $\beta_1: A \rightarrow B_1$ glatt, $\text{Ann}_{B_1}(N_1) = 0$, und es gilt

$$\dim_{B_1/\mathfrak{m}_{B_1}}(N_1/\mathfrak{m}_{B_1}N_1) = \dim_{B_2/\mathfrak{m}_{B_2}}(N_2/\mathfrak{m}_{B_2}N_2) < n.$$

Von Induktionsvoraussetzung gibt es daher eine A -lineare stetige Abbildung $s_1: N_1 \rightarrow M$ mit $(\text{pos} \circ s_1) = \text{id}_{N_1}$.

Daher besteht die exakte Sequenz $0 \rightarrow L_0 \xrightarrow{\beta_0} N \xrightarrow{\beta_1} N_1 \rightarrow 0$ als Sequenz von stetigen A -Moduln, da pos stetige A -lineare Rechtsinverse zu β_1 ist, d.h. es gibt $s: N \rightarrow L_0$ A -lineare stetige Linksinverse zu β_0 mit $\text{id}_N = \text{pos}_0 \circ s + \beta_0 \circ s_1$, wobei die Stetigkeit aus (0.1.6) folgt.

Da L_0 endlicher freier B_0 -Modul ist, gibt es wie im Fall $N_1 = 0$, eine stetige B_0 -lineare Abbildung $s_2: L_0 \rightarrow M$ mit $\text{pos}_2 = \beta_0$, die wiederum insbesondere A -linear ist.

Insgesamt erhält man also mit $s := s_2 \circ s + s_1 \circ \alpha: N \rightarrow M$ eine stetige A -lineare Abbildung, so daß $\text{pos} = \text{pos}_2 \circ s + \text{pos}_1 \circ \alpha = \beta_0 \circ s + \text{pos}_1 \circ \alpha = \text{id}_N$ gilt.

(2.7) Korollar : Sei $0 \rightarrow K \rightarrow W \rightarrow W \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz endlicher B -Moduln, $f: A \rightarrow B$ ein analytischer Homomorphismus und W flach über A .

Dann zerfällt die exakte Sequenz als exakte Sequenz in $A\text{-ANMOD}$.

(2.8) Definition : Sei A eine analytische Algebra.

1) ([Bi] § 1) Ein A -Modul P heißt pseudofreier A -Modul, wenn er als A -Modul isomorph zu einer endlichen direkten Summe

$$\bigoplus_{i=1}^n A \{z_1, \dots, z_{k_i}\}^{r_i} \quad \text{für geeignete } k_i, r_i \in \mathbb{N}_s \text{ ist.}$$

2) Sei $A\text{-ANMOD}$ die Kategorie der analytischen Moduln über A , d.h.: Die Objekte seien analytische Moduln, die gleichzeitig A -Moduln sind, derart daß es einen analytischen Homomorphismus $g: A \rightarrow C$ und eine endliche C -Modulstruktur auf M gibt, die die topologische Vektorraumstruktur auf M , sowie die A -Modulstruktur induziert. Die Morphismen seien die stetigen A -linearen Abbildungen.

3) ([Wo] § 3) $P \in A\text{-ANMOD}$ heißt relativ projektiver A -Modul, wenn für alle Epimorphismen $f \in A\text{-ANMOD}(W, N)$, für die es eine stetige C -lineare Rechtsinverse gibt, gilt: $A\text{-ANMOD}(P, f)$ ist surjektiv d.h. für alle $g \in A\text{-ANMOD}(P, N)$ gibt es ein $h \in A\text{-ANMOD}(P, W)$, so daß $g = fh$ ist.

(2.9) Folgerung : Seien A und B analytische Algebren, $f: A \rightarrow B$ ein analytischer Homomorphismus und $M \neq 0$ ein endlicher B -Modul. Dann sind äquivalent:

- i) M ist flacher A -Modul.
- ii) M ist pseudofreier A -Modul.
- iii) M ist relativ projektiver A -Modul.

Beweis : i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\mathcal{P} = (B_i, L_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq r}$ eine totale Aufbereitung von M über A . Wegen der A -Flachheit von M hat man exakte Sequenzen $0 \rightarrow L_i \xrightarrow{\beta_i} W_i \rightarrow W_{i+1} \rightarrow 0$ für alle $0 \leq i \leq r$.

Nach (2.7) Korollar zerfallen diese exakten Sequenzen als Sequenzen von stetigen A -Moduln, so daß M als A -Modul isomorph ist zu

$$\bigoplus_{i=0}^r L_i, \text{ wobei } L_i \text{ endliche freie } B_i\text{-Moduln sind. Da } A \rightarrow B_i \text{ glatt}$$

ist für alle $0 \leq i \leq r$, folgt die Behauptung.

$$ii) \Rightarrow iii): M = \bigoplus_{i=0}^n A\{z_1, \dots, z_{k_i}\}^{r_i} \cong A \hat{\otimes} \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{k_i}\}^{r_i}$$

gilt nach Voraussetzung und mit [Wo] Satz 11 folgt die Behauptung.

iii) $\Rightarrow$ i): Nach (0.3.10) kann angenommen werden, daß M endlicher $A\{z_1, \dots, z_n\}$ -Modul mit $n = \dim_B(M)$ ist. Es gibt also einen $A\{z_1, \dots, z_n\}$ -Modulepimorphismus $f: A\{z_1, \dots, z_n\}^r \rightarrow M$.

Nach (1.2) Korollar zerfällt nun die exakte Sequenz endlicher $A\{z_1, \dots, z_n\}$ -Moduln

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow A\{z_1, \dots, z_n\}^r \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

als exakte Sequenz topologischer Vektorräume, d.h. es gibt eine $\mathbb{C}$ -lineare stetige Rechtsinverse zu f .

Da M relativ projektiver A -Modul ist, gibt es zu $\text{id}_M: M \rightarrow M$ eine stetige A -lineare Abbildung $g: M \rightarrow A\{z_1, \dots, z_n\}^r$ mit $\text{id}_M = f \circ g$.

Daher ist M ein A -direkter Summand von $A\{z_1, \dots, z_n\}^r$ und somit flacher A -Modul.

3. Flachheit = Pseudofreiheit = nukleare Freiheit

Ziel dieses Abschnitts ist es, Lemma (1.1) bzw. dessen Verallgemeinerung Lemma (2.5) zusammen mit Folgerung (2.8) auf den lokalen Fall zu übertragen und daraus ein Flachheitskriterium zu gewinnen.

Dazu wird für eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow S$ zwischen komplexen Räumen X und S und eine auf X kohärente Garbe $\mathcal{F}$ der Begriff der totalen Aufbereitung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ in einem Punkt a des Trägers von $\mathcal{F}$ über S definiert und anschließend die Existenz einer solchen Aufbereitung bewiesen. An dieser Stelle wird die spezielle Form der Aufbereitung eines Moduls benötigt, wie sie nach (2.4) Bemerkung existiert.

Ist die Abbildung $f : X \rightarrow S$ zusätzlich flach in a , so gibt es eine totale Aufbereitung von $\mathcal{O}_X$ in a über S mit Steinschen Umgebungen U von a in X und V von $f(a)$ in S , die einen kanonischen

$$\mathcal{O}_V\text{-Modulgarbenisomorphismus } \alpha: \bigoplus_{j=0}^k (p_{S_j})_* \mathcal{O}_{V \times_{P_{S_j}}}^{1_j} \rightarrow (f|_U)_* \mathcal{O}_U$$

induziert.

Umgekehrt gilt: Gibt es eine derartige totale Aufbereitung von $\mathcal{O}_X$ in a über S , so ist f in a flach.

Hierbei und im weiteren werden folgende Bezeichnungen benützt:

Für einen offenen Polyzylinder $P := P(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ mit Multiradius $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ sei $P_i := P(0, (r_1, \dots, r_i)) \subset \mathbb{C}^i$ für alle $0 < i \leq n$ und $P_0 := \{0\}$.

Ist S ein komplexer Raum, so seien $p_i : S \times P_i \rightarrow S$, $0 \leq i \leq n$, die Projektionen auf S (für $i = n$ auch ohne Index geschrieben) und $q_i : S \times P \rightarrow S \times P_i$, $0 \leq i \leq n$ die Projektionen auf $S \times P_i$.

Im weiteren sei für $0 \leq i \leq n$ der Raum $\mathbb{C}^i$ mit $\mathbb{C}^i \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ identifiziert.

Seien X und S komplexe Räume, $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, $a \in X$,

$$B := \mathcal{O}_{X,a} \text{ und } A := \mathcal{O}_{S,f(a)} \text{ mit dem maximalen Ideal } \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A.$$

(3.1) Definition : Seien X und S komplexe Räume, $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, und $a \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ in a über S besteht aus

- a) einer offenen Umgebung U von a in X , einer offenen Umgebung V von $f(a)$ in S , einem offenen Polyzylinder $W := P(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$ und einer Einbettung $i : U \rightarrow V \times W$, $a \mapsto (f(a), 0)$, so daß $f(U) \subset V$

ist und für $f' := f|_U$ gilt:
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & V \times W \\ f' \searrow & & \swarrow p \\ & V & \end{array}$$
 kommutiert,

- b) einer Folge $(V \times W \xrightarrow{\pi_0} V \times P_0 \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_k} V \times P_k)$ von Projektionen, wobei für alle $0 \leq j \leq k$ gelte $P_j = W_{s_j}$ für $s_j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\dim_{B/\mathcal{M}B}(\mathcal{F}_a/\mathcal{M}\mathcal{F}_a) = s_0 > s_1 > \dots > s_k = \text{prof}_{B/\mathcal{M}B}(\mathcal{F}_a/\mathcal{M}\mathcal{F}_a)$$

- c) einer Folge von $\mathcal{O}_{V \times P_j}$ -Modulhomomorphismen $(\mathcal{O}_{V \times P_j}^{1,j} \xrightarrow{\beta_j} \mathcal{F}_j)$, wobei $\mathcal{F}_0 = (\pi_0)_* i_* (\mathcal{F}|_U)$ und $\mathcal{F}_j = (\pi_j)_*(\text{coker } \beta_{j-1})$ sei, so daß $\pi_0| : \text{Tr}(i_* \mathcal{F}|_U) \rightarrow V \times P_0$ und $\pi_j| : \text{Tr}(\text{coker } \beta_{j-1}) \rightarrow V \times P_j$ endlich ist mit $(\pi_j|)^{-1}(a) = \{a\}$ und eine totale Aufbereitung

$\mathcal{P}_a = (\mathcal{O}_{V \times P_j, a} : \mathcal{O}_{V \times P_j, a}^{1,j} : \alpha_j)$ von $\mathcal{F}_a$ über $\mathcal{O}_{S, f(a)}$ induziert wird.

(D.h. zu der Folge $(B_k \xrightarrow{h_k} B_{k-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{h_1} B_0 \xrightarrow{h_0} B)$ mit

$B_j := \mathcal{O}_{V \times P_j, a}$ für $0 \leq j \leq k$, und $h_0 := (\pi_0 \circ i)_a^\sim$, sowie

$h_j := (\tilde{\pi}_j)_a$ für $1 \leq j \leq k$ gibt es B_j -Modulhomomorphismen

$\alpha_j : B_j^{1,j} \rightarrow \mathcal{F}_a$, so daß die induzierten B_j -Modulhomomorphismen

$L_j \rightarrow \mathcal{F}_a/(\alpha_0(L_0) + \dots + \alpha_{j-1}(L_{j-1}))$ mit $L_j := B_j^{1,j}$, $L_{-1} := 0$

die B_j -Modulhomomorphismen $\beta_{j,a} : B_j^{1,j} \rightarrow \mathcal{F}_{j,a}$ sind und

$\mathcal{P}_a$ damit eine totale Aufbereitung von $\mathcal{F}_a$ über $\mathcal{O}_{S, f(a)}$ ist.)

Für eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ in a über S wird kurz $\mathcal{P} = (U \xrightarrow{i} V \times W, \pi_j, \beta_j)$ geschrieben.

(3.2) Lemma : Sei S ein komplexer Raum, $P \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(S \times P)$ und $a = (y, 0) \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Dann gibt es nach einer eventuellen Koordinatentransformation in $\mathbb{C}^n$ Umgebungen V von y in S und $W := P(0, r) \subset P$ mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$, und eine totale Aufbereitung $\mathcal{P} = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)$ von $\mathcal{F}$ in a über S .

Beweis : Nach Bemerkung (2.4) gibt es nach einer geeigneten Koordinatentransformation in $\mathbb{C}^n$ eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}_a$ des $B := \mathcal{O}_{S \times P, a}$ -Moduls $\mathcal{F}_a$ über $A := \mathcal{O}_{S, y}$ mit den Inklusionen

$$A\{z_1, \dots, z_{s_k}\} \subset A\{z_1, \dots, z_{s_{k-1}}\} \subset \dots \subset A\{z_1, \dots, z_{s_0}\} = B$$

als Folge der A -linearen analytischen Homomorphismen von $\mathcal{P}_a$.

Der Beweis wird nun durch Induktion nach $d := \dim_{B/\mathfrak{m}_B}(\mathcal{F}_a/\mathfrak{m}_B \mathcal{F}_a)$

für $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$ unter der Annahme der Existenz einer solchen Aufbereitung $\mathcal{P}_a$ geführt:

Ist $d = 0$, so ist $A \xrightarrow{\beta_a} B/\text{Ann}_B(\mathcal{F}_a)$ endlich, wobei

$p : S \times P \rightarrow S$ die Projektion sei, und es gibt Umgebungen V von y in S und $W := P(0, r) \subset P$, so daß $p|_V : V \times W \cap \text{Tr } \mathcal{F} \rightarrow V$ endlich mit $p|_V^{-1}(a) = \{a\}$ ist (siehe [K-K] 45.5).

Nach eventueller Verkleinerung von V gibt es, da $(p|_{V \times W})_*(\mathcal{F}|_{V \times W})$ kohärenter $\mathcal{O}_V$ -Modul ist, einen $\mathcal{O}_V$ -Modulepimorphismus

$$\beta_0 : \mathcal{O}_V^{1_0} \rightarrow (p|_{V \times W})_* \mathcal{F}|_{V \times W}, \text{ der den } A\text{-Modulepimorphismus}$$

$$A^{1_0} \xrightarrow{\beta_a} \mathcal{F}_a \text{ der totalen Aufbereitung } \mathcal{P}_a = (A, A^{1_0}, \beta_0) \text{ fortsetzt.}$$

Für $d > 0$ sei $\mathcal{P}_a = (A\{z_1, \dots, z_{s_i}\}, A\{z_1, \dots, z_{s_i}\}^{1_i}, a_1)_0 \leq i \leq k$ eine totale Aufbereitung von $\mathcal{F}_a$ über A nach (2.4).

Dann ist das Annulatorideal $\text{Ann}_B(\mathcal{F}_a) (z_{d+1}, \dots, z_n)$ -allgemein

und damit $B/(z_{d+1}, \dots, z_n) \rightarrow B/\text{Ann}_B(\mathcal{F}_a)$ endlich.

Es gibt also wieder Umgebungen V' von y und $W' := P(0, r') \subset P$,
so daß $q_d|: V' \times W' \cap \text{Tr } \mathcal{F} \rightarrow V' \times W'_d$ endlich mit $q_d|^{-1}(a) = \{a\}$,
und $(q_d|_{V' \times W'})_*(\mathcal{F}|_{V' \times W'}) \in \text{Coh}(V' \times W'_d)$ ist.

Wegen der Kohärenz von $\mathcal{O}_{V' \times W'_d}^{1_0}$ und $(q_d|_{V' \times W'})_*(\mathcal{F}|_{V' \times W'})$
gibt es Umgebungen $V'' \subset V'$ von y und $W''_d := P(0, r'') \subset W'_d$ und
einen $\mathcal{O}_{V'' \times W''_d}$ -Modulhomomorphismus

$$\alpha_o: \mathcal{O}_{V'' \times W''_d}^{1_0} \rightarrow (q_d|_{V' \times W'})_*(\mathcal{F}|_{V' \times W'})|_{V'' \times W''_d} = (q_d|_{V'' \times W''_d})_*(\mathcal{F}|_{V'' \times W''_d})$$

mit $(\alpha_o)_a = a_o$, wobei $W'' := P(0, (r''_1, \dots, r''_d, r'_{d+1}, \dots, r'_n))$ sei.

Falls $\text{coker}(\alpha_o)_a = 0$ ist, ist man fertig, sonst gibt es nach
Induktionsvoraussetzung, da

$\dim_{B'} / \mathcal{M}_{B'}(\text{coker}(\alpha_o)_a / \mathcal{M} \text{coker}(\alpha_o)_a) < d$ mit $B' := \mathcal{O}_{V \times W_d, a}$ ist
und da $\mathcal{P}'_a := (A\{z_1, \dots, z_{s_i}\}, A\{z_1, \dots, z_{s_i}\}^{1_i}, a_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine
totale Aufbereitung von $\text{coker}(\alpha_o)_a$ über A ist,

Umgebungen $V \subset V''$ und $W_d := P(0, t) \subset W''_d$ und eine totale Aufberei-
tung $Q = (\text{id}_V \times W_d, \mu_j: V \times Q_{j-1} \rightarrow V \times Q_j, \gamma_j)_{0 \leq j \leq k-1}$ für
 $\text{coker } \alpha_o \in \text{Coh}(V \times W_d)$ in a über V , wobei $Q_{-1} := W_d$ sei.

Man erhält daher mit V und $W := P(0, r)$, $r = (t_1, \dots, t_d, r'_{d+1}, \dots, r'_n)$,
Umgebungen, vermöge $\pi_o := q_d|_{V \times W}$ und $\pi_{j+1} := \mu_j$ Projektionen und
mit $\beta_o := \alpha_o|_{V \times W_d}: \mathcal{O}_{V \times W_d}^{1_0} \rightarrow (q_d|_{V'' \times W''_d})_*(\mathcal{F}|_{V'' \times W''_d})|_{V \times W_d} =$
$$= (\pi_o)_* \mathcal{F}|_{V \times W}$$

$$\beta_{j+1} := \gamma_j$$

Garbenhomomorphismen, so daß $\mathcal{P} := (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)$ eine totale
Aufbereitung von $\mathcal{F}$ in a über S ist.

(3.3) Folgerung : Seien X und S komplexe Räume, $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$ und $a \in \text{Tr } \mathcal{F}$.
Dann existiert eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ in a über S .

Beweis : Sei eine offene Umgebung U' von a in X , eine offene Umgebung V' von $f(a)$ in S , ein Polyzylinder $W' := P(0, r') \subset \mathbb{C}^n$ mit Multiradius $r' \in \mathbb{R}_+^n$ gewählt, so daß $f(U') \subset V'$ gilt, und es eine Einbettung $i' : U' \rightarrow V' \times W'$, $a \mapsto b := (f(a), 0)$ gibt,

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{i'} & V' \times W' \\ f|_{U'} \searrow & & \downarrow \\ & & V' \end{array}$$

kommutiert.

Für $\mathcal{G} := i'_*(\mathcal{F}|_{U'}) \in \text{Coh}(V' \times W')$ gibt es nach (3.2) Lemma nach eventueller Koordinatentransformation $l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine totale Aufbereitung $\mathcal{P}' = (\text{id}_V \times W, \mathcal{N}_j, \beta_j)$ von $\mathcal{G}$ in b über V .

Mit $U := U' \cap l^{-1}(V \times W)$ und $i := l|_{U^{-1}(V \times W)} \circ i'|_U : U \rightarrow V \times W$

erhält man die gewünschte Aufbereitung $\mathcal{P} = (U \xrightarrow{i} V \times W, \mathcal{N}_j, \beta_j)$.

(3.4) Bemerkung : Sei S ein komplexer Raum, $P := P(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Polyzylinder mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$, $p : S \times P \rightarrow S$ die Projektion, $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz kohärenter $\mathcal{O}_{S \times P}$ -Moduln. Dann ist $0 \rightarrow p_* \mathcal{F} \rightarrow p_* \mathcal{G} \rightarrow p_* \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_S$ -Moduln.

Beweis : Da für alle offenen und Steinschen Mengen $V \subset S$ gilt, daß $0 \rightarrow \mathcal{F}(V \times P) \rightarrow \mathcal{G}(V \times P) \rightarrow \mathcal{H}(V \times P) \rightarrow 0$ exakt ist, und jeder Punkt $x \in S$ eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen $V \ni x$ besitzt, folgt wegen $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{\substack{x \in V \subset S \\ \text{offen Steinsch}}} \mathcal{F}(V)$ für $\mathcal{O}_V$ -Moduln $\mathcal{F}$

daß $0 \rightarrow p_* \mathcal{F}_x \rightarrow p_* \mathcal{G}_x \rightarrow p_* \mathcal{H}_x \rightarrow 0$ für jedes $x \in S$ eine exakte $\mathcal{O}_{S,x}$ -Modulsequenz ist.

(3.5) Definition : Sei V ein Steinscher komplexer Raum, $W := P(0, r) \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Polyzylinder mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$, $p: V \times W \rightarrow V$ die Projektion auf V , $\mathcal{F} \in \text{Coh}(V \times W)$, $a = (y, 0) \in \text{Tr } \mathcal{F}$. Eine totale Aufbereitung $\mathcal{P} = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)_{0 \leq j \leq k}$ von $\mathcal{F}$ in a über V induziert den $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus

$$\alpha: \bigoplus_{j=0}^k (p_{s_j})_* \mathcal{O}_{V \times P_j}^{1j} \rightarrow p_* \mathcal{F}, \text{ wenn für alle } 0 \leq j \leq k$$

$$\beta_j: \mathcal{O}_{V \times P_j}^{1j} \rightarrow \mathcal{F}_j \text{ injektiv ist und } \alpha_j := \alpha|_{(p_{s_j})_* \mathcal{O}_{V \times P_j}^{1j}}$$

induziert wird durch einen $\mathcal{O}_{V \times P_j}$ -Modulhomomorphismus

$$\tilde{\beta}_j: \mathcal{O}_{V \times P_j}^{1j} \rightarrow (q_{s_j})_* \mathcal{F} \text{ mit } \beta_j = \mu_j \circ \tilde{\beta}_j \text{ wobei}$$

$\mu_j: (q_{s_j})_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_j$ den nach Bemerkung (3.4) surjektiven kanonischen

$\mathcal{O}_{V \times P_j}$ -Modulhomomorphismus bezeichne.

(3.6) Lemma : Sei S ein komplexer Raum, $P \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung, $p: S \times P \rightarrow S$ die Projektion auf S , $\mathcal{F} \in \text{Coh}(S \times P)$, und $a = (y, 0) \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Äquivalent sind :

i) $\mathcal{F}$ ist in a p -flach .

ii) Nach eventueller Koordinatentransformation in $\mathbb{C}^n$ gibt es eine Steinsche Umgebung $V \subset S$ von y und eine Nullumgebung $W := P(0, r) \subset P$ mit Multiradius $r \in \mathbb{R}_+^n$, und eine totale Aufbereitung $\mathcal{P} = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)_{0 \leq j \leq k}$ von $\mathcal{F}$ in a über S , die einen $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus

$$\alpha: \bigoplus_{j=0}^k (p_{s_j}|_{V \times W_{s_j}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{s_j}}^{1j} \longrightarrow (p|_{V \times W})_*(\mathcal{F}|_{V \times W})$$

induziert.

Beweis : i) $\Rightarrow$ ii): Nach (3.2) Lemma gibt es nach einer eventuellen Koordinatentransformation in $\mathbb{C}^n$ eine Umgebung $\tilde{V}$ von y in S und einen Polyzylinder $\tilde{W} := P(0, \tilde{r}) \subset P$ mit Multiradius $\tilde{r} \in \mathbb{R}_+^n$, zusammen mit einer totalen Aufbereitung $\tilde{\mathcal{P}} = (\text{id}_{\tilde{V} \times \tilde{W}}, \tilde{\pi}_j, \tilde{\beta}_j)_{0 \leq j \leq k}$ von $\mathcal{F}$ in a über $\tilde{V}$.

Wir beweisen nun $i) \Rightarrow ii)$ durch Induktion nach

$m := \text{coprof}_{B'/mB'}(\mathcal{F}_a/m\mathcal{F}_a)$ unter der Annahme der Existenz einer solchen Aufbereitung $\tilde{\mathcal{P}}$, so daß die gesuchte Aufbereitung durch Einschränkung von $\text{id}_{\tilde{V} \times \tilde{W}}$, sowie der π_j und β_j aus $\tilde{\mathcal{P}}$ entsteht:

Sei also $\tilde{\mathcal{P}} = (\text{id}_{\tilde{V} \times \tilde{W}}, \pi_j, \beta_j)$ eine totale Aufbereitung von $\tilde{\mathcal{F}}$ in a über S . Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}_a$ flacher A -Modul, so daß

nach (2.5) folgt, daß $(\beta_0)_a: \mathcal{O}_{S \times W_{S_0}, a}^{1_0} \rightarrow \mathcal{F}_a$ injektiv ist.

Es gibt daher Umgebungen $V' \subset \tilde{V}$ von y und $W' := P(0, r') \subset \tilde{W}$

mit $\beta_0|_{V' \times W'}: \mathcal{O}_{V' \times W'_{S_0}}^{1_0} \rightarrow (\pi_0|_{V' \times W'})_* \mathcal{F}$ injektiv, und es gibt

so eine exakte Garbensequenz kohärenter $\mathcal{O}_{V' \times W'_{S_0}}$ -Modulgarben:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{V' \times W'_{S_0}}^{1_0} \xrightarrow{\beta_0|_{V' \times W'}} (\pi_0|_{V' \times W'})_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R} := \text{coker}(\beta_0|_{V' \times W'}) \rightarrow 0.$$

Ist $\underline{m} = 0$, so ist $\mathcal{R}_a = 0$, und es gibt offene Steinsche Umgebungen

$y \in V \subset V'$ und $W := P(0, r) \subset W'$, so daß $\mathcal{R}|_{V \times W} = 0$ ist.

$\beta_0|_{V \times W}: \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}^{1_0} \rightarrow (\pi_0|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W})$ ist also Isomorphismus von

$\mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}$ -Modulgarben und daher gibt es einen $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus

$$\begin{aligned} (p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}^{1_0} &\xrightarrow{\alpha} (p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* (\pi_0|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W}) \cong \\ &\cong (p|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W}) \quad \text{mit } \alpha := (p_{S_0}|_*)_* (\beta_0|_*) . \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := (\text{id}_{V \times W}, \pi_0|_{V \times W}, \beta_0|_{V \times W})$ ist somit eine gesuchte Aufbereitung.

Ist $\underline{m} > 0$, so ist $\mathcal{R}_a \neq 0$ und $(\text{id}_{V' \times W'_{S_0}}, \pi_{j+1}|_{V' \times W'_{S_j}}, \beta_{j+1}|_{V' \times W'_{S_{j+1}}})$

eine totale Aufbereitung von $\mathcal{R}$ in a , so daß wegen der Injektivität

der β_j nach (2.5) $\mathcal{R}_a$ ein flacher $\mathcal{O}_{V, y}$ -Modul ist und es so wegen

$\text{coprof}_{B'/mB'}(\mathcal{R}_a/m\mathcal{R}_a) < m$ mit $B' := \mathcal{O}_{V' \times W'_{S_0}}$ nach Induktions-

voraussetzung eine Steinsche Umgebung $V \subset V'$ von y , $W := P(0, r) \subset W'$,

und eine totale Aufbereitung $\mathcal{Q} = (\text{id}_{V \times W_{S_0}}, \pi_{j+1}, \beta_{j+1})$ von $\mathcal{R}$ in a gibt,

die einen $\mathcal{O}_V$ -Modulgarben-Isomorphismus induziert:

$$(p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_*(\mathcal{R}|_{V \times W_{S_0}}) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{k-1} (p_{S_{i+1}}|_{V \times W_{S_{i+1}}})_*(\mathcal{O}_{V \times W_{S_{i+1}}}^{1_{i+1}}).$$

Man erhält also, da $V \times W_{S_0}$ Steinsch ist, eine exakte Sequenz von Schnittmoduln (*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}^{1_0}(V \times W_{S_0}) \longrightarrow (\pi_0|_{V \times W})_*(\mathcal{F}|_{V \times W})(V \times W_{S_0}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}(V \times W_{S_0}) \longrightarrow 0$$

$$\parallel \quad \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathcal{O}_{V \times W_{S_{i+1}}}^{1_{i+1}}(V \times W_{S_{i+1}}),$$

die als Sequenz von $\mathcal{O}_V(V)$ -Moduln zerfällt.

Denn es kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß

$(\pi_0|_{V \times W})_*(\mathcal{F}|_{V \times W})(V \times W_{S_0})$ endlich erzeugter $\mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}(V \times W_{S_0})$ -Modul ist.

Weiter gilt $\mathcal{O}_{V \times W_{S_j}}(V \times W_{S_j}) \cong \mathcal{O}_V(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{W_{S_j}}(W_{S_j})$ für alle $0 \leq j \leq k$,

und da $\lambda_j : \mathcal{O}_{W_{S_j}}(W_{S_j}) \subset \mathcal{O}_{W_{S_0}}(W_{S_0})$ für $0 \leq j \leq k$ stetig und

$\mathcal{O}_{W_{S_j}}(W_{S_j})$ -linear ist, hat man für alle $0 \leq j \leq k$ stetige

$\mathcal{O}_{V \times W_{S_j}}(V \times W_{S_j})$ -lineare Abbildungen

$$\mathcal{O}_V(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{W_{S_j}}(W_{S_j}) \xrightarrow{\text{id} \hat{\otimes} \lambda_j} \mathcal{O}_V(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{W_{S_0}}(W_{S_0})$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$\mathcal{O}_{V \times W_{S_j}}(V \times W_{S_j}) \quad \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}(V \times W_{S_0}).$$

Damit erhält man genauso wie in (1.1) Lemma, daß der $\mathcal{O}_V$ -Modulepimorphismus eine (bzgl. der kanonischen Fréchettopologie) stetige $\mathcal{O}_V(V)$ -lineare Rechtsinverse besitzt, so daß die Sequenz (*) als Sequenz von $\mathcal{O}_V(V)$ -Moduln zerfällt.

Wie in (3.4) ist dann

$$0 \longrightarrow (p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}^{1_0} \longrightarrow (p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* (\pi_0|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W}) \longrightarrow \\ \longrightarrow (p_{S_0}|_{V \times W})_* \mathcal{R} \longrightarrow 0$$

exakt und zerfällt als $\mathcal{O}_V$ -Modulgarben-Sequenz, d.h. es gilt

$$(p|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W}) \cong (p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* (\pi_0|_{V \times W})_* (\mathcal{F}|_{V \times W}) \cong$$

$$(p_{S_0}|_{V \times W_{S_0}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{S_0}}^{1_0} \oplus \bigoplus_{j=1}^k (p_{S_j}|_{V \times W_{S_j}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{S_j}}^{1_j} = \bigoplus_{j=0}^k (p_{S_j}|_{V \times W_{S_j}})_* \mathcal{O}_{V \times W_{S_j}}^{1_j}.$$

Es gibt also einen $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus, der von der totalen Aufbereitung $\mathcal{P} = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j|_{V \times W}, \beta_j|_{V \times W})$ induziert wird.

ii) $\Rightarrow$ i) : ist nach (2.5) klar.

(3.7) Bemerkung : Der Beweis von (3.6) i) $\Rightarrow$ ii) zeigt, daß die totale Aufbereitung $\mathcal{P}$ so gewählt werden kann, daß der induzierte $\mathcal{O}_V$ -Modulgarbenisomorphismus α ein $\mathcal{O}_V$ -Fréchetgarbenisomorphismus ist.

(3.8) Definition : Sei S ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie.

1) Ein $\mathcal{O}_S$ -Fréchet-Modul $\mathcal{F}$ heißt pseudofrei, wenn es endlich viele Polyzylinder $P_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$ gibt, so daß $\mathcal{F}$ als $\mathcal{O}_S$ -Fréchet-Modul isomorph ist zu $\bigoplus_i (p_i)_* \mathcal{O}_{S \times P_i}$, wobei $p_i: S \times P_i \rightarrow S$ die Projektionen seien.

2) Ein $\mathcal{O}_S$ -Fréchet-Modul $\mathcal{F}$ heißt nuklear-frei, wenn es einen nuklearen $\mathbb{C}$ -linearen Fréchet-Raum N gibt, so daß $\mathcal{F}$ als $\mathcal{O}_S$ -Fréchet-Modul isomorph ist zu $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} N$.

3) Ein $\mathcal{O}_S$ -Fréchet-Modul $\mathcal{F}$ heißt flach, wenn $\mathcal{F}_y$ als $\mathcal{O}_{S,y}$ -Modul flach ist für alle $y \in S$.

Definition 1) findet sich in [Hi], zu Definition 2) siehe [D-V] 1-3.

4) Sei X ein komplexer Raum, $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, $a \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ heißt bei a f_* -pseudofrei (f_* -nuklear-frei, f_* -flach), wenn es eine offene Steinsche Umgebung U von a in X und eine offene Steinsche Umgebung V von $f(a)$ in S mit $f(U) \subset V$ gibt, so daß $(f|_U)_*(\mathcal{F}|_U)$ pseudofreier (nuklear-freier, flacher) $\mathcal{O}_S|_V$ -Fréchet-Modul ist.

$\mathcal{F}$ heißt bei a f_* -kanonisch-pseudofrei, wenn es eine offene Steinsche Umgebung U von a in X , eine Steinsche Umgebung V von $f(a)$ in S mit $f(U) \subset V$ und eine totale Aufbereitung $\mathcal{P} = (U \xrightarrow{i} V \times W, \pi_j, \beta_j)$ von $\mathcal{F}$ in a über S gibt, so daß die von $\mathcal{P}$ induzierte totale Aufbereitung $\mathcal{P}' = (\text{id}_{V \times W}, \pi_j, \beta_j)$ von $i_* \mathcal{F}|_U$ in $(f(a), 0)$ über S einen $\mathcal{O}_V$ -Modul-

garbenisomorphismus $\alpha : \bigoplus_{j=0}^k (p_{s_j})_* \mathcal{O}_{V \times P_j}^{1j} \rightarrow (f|_U)_* \mathcal{F}|_U$ induziert.

(3.9) Satz : Seien X und S komplexe Räume, $f : X \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, $a \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Äquivalent sind :

- i) $\mathcal{F}$ ist in a f -flach.
- ii) $\mathcal{F}$ ist bei a f_* -kanonisch-pseudofrei.
- iii) $\mathcal{F}$ ist bei a f_* -pseudofrei.
- iv) $\mathcal{F}$ ist bei a f_* -nuklear-frei.
- v) $\mathcal{F}$ ist bei a f_* -flach.
- vi) $\mathcal{F}$ ist bei a f -flach.

Beweis : i) $\Rightarrow$ ii) : Nach (3.3) gibt es eine totale Aufbereitung

$\mathcal{P} = (U \xrightarrow{i} V \times W, \pi_j, \beta_j)$ von $\mathcal{F}$ in a über S , dabei kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $U \subset X$ Steinsch und $V \subset S$ Steinsch sind. Nach (3.6) gibt es eine Steinsche Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von $y=f(a)$ und einen Polyzylinder $\tilde{W} := P(0, s) \subset W$, so daß

$i_*(\mathcal{F}|_U)|_{\tilde{V} \times \tilde{W}}$ bei $(y, 0)$ $(p|_{\tilde{V} \times \tilde{W}})_*$ -kanonisch-pseudofrei ist.

Wegen $(p|_{\tilde{V} \times \tilde{W}})_* i_*(\mathcal{F}|_U)|_{\tilde{V} \times \tilde{W}} \cong (f|_{\tilde{U}})_*(\mathcal{F}|_{\tilde{U}})$ mit der Steinschen Umgebung $\tilde{U} := U \cap i^{-1}(\tilde{V} \times \tilde{W})$ von a , folgt die Behauptung.

ii) $\Rightarrow$ iii): ist nach Definition (3.8) und Bemerkung (3.7) klar.

iii) $\Rightarrow$ iv): Es gibt nach Voraussetzung Umgebungen U von a , V von $f(a)$

und endlich viele Polyzylinder $P_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$, so daß $(f|_U)_*(\mathcal{F}|_U)$ als

$\mathcal{O}_S|_V$ -Fréchet-Modul zu $\bigoplus_{i=0}^m (p_i)_* \mathcal{O}_{V \times P_i} =: \mathcal{R}$ isomorph ist.

Für alle offenen $\tilde{V} \subset V$ gilt nun:

$$\mathcal{R}(\tilde{V}) = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_{V \times P_i}(\tilde{V} \times P_i) \cong \mathcal{O}_V(\tilde{V}) \hat{\otimes} \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_{P_i}(P_i).$$

Da $N := \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{O}_{P_i}(P_i)$ ein nuklearer Fréchet-Raum ist, erhält man,

daß $(f|_U)_*(\mathcal{F}|_U)$ als $\mathcal{O}_S|_V$ -Fréchet-Modul zu $\mathcal{O}_S|_V \hat{\otimes} N$ isomorph ist, also nuklear-frei ist.

iv) $\Rightarrow$ v) ist klar mit [D-V] exposé I 3.3 corollaire 1.

v) $\Rightarrow$ vi) [Hi] Theorem 1.3. (siehe (3.10))

vi) $\Rightarrow$ i) ist trivial.

Es sei noch das im Beweis von (3.9) v) $\Rightarrow$ vi) benutzte Zitat nachgetragen:

(3.10) Satz (Hironaka): Seien X und Y komplexe Räume, X Steinsch, $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$.

Dann ist $f_* \mathcal{F}$ genau dann flacher $\mathcal{O}_Y$ -Modul, wenn $\mathcal{F}$ f -flach ist.

(3.11) Bemerkung: In Satz (3.9) kann die offene Steinsche Umgebung

U von a über der $\mathcal{F}$ f_* -kanonisch-pseudofrei, f_* -pseudofrei,

f_* -nuklearfrei, f_* -flach, bzw. f -flach bei a ist, so gewählt werden,

daß $f' = f|_U: U \rightarrow V$ surjektiv ist.

Beweis: Mit den Bezeichnungen im Beweis von i) $\Rightarrow$ ii) hat man

$$\text{Tr}((q_d|_{V \times W})_* i_*(\mathcal{F}|_U)|_{V \times W}) = V \times W_d \quad \text{für } d = \dim_{B/M} B(M/M),$$

wobei $B := \mathcal{O}_{V \times W, i(a)}$ und $M := i_*(\mathcal{F}|_U)_{i(a)}$ seien.

Als Anwendung des Flachheitskriteriums (3.9) ergibt sich:

(3.12) Korollar : Seien X und Y komplexe Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, $a \in \text{Tr } \mathcal{F}$.

Ist Y zusätzlich reduziert und $\mathcal{P} = (U \xrightarrow{i} V \times W, \pi_j, \beta_j)_{0 \leq j \leq k}$ eine totale Aufbereitung von $\mathcal{F}$ in a über Y , dann sind äquivalent:

i) $\mathcal{F}$ ist bei a f -flach.

ii) Für alle $0 \leq j \leq k$ sind die Abbildungen $\mu_j : V \times P_j \rightarrow \mathbb{R}$,

$x \mapsto \mu_x(\text{bi } \beta_j)$ konstant bei a , wobei

$\mu_x(\mathcal{N}) := \dim(\mathcal{N}_x / \mathfrak{m}_{j,x} \mathcal{N}_x)$ für $x \in V \times P_j$ und $\mathcal{N} \in \text{Coh}(V \times P_j)$

sei, und $\mathfrak{m}_{j,x}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{V \times P_j, x}$ bezeichne.

Beweis : i) $\Rightarrow$ ii): Satz (3.9)

ii) $\Rightarrow$ i): Nach [Fi] 1.8 sind für alle $0 \leq i \leq k$ die $\mathcal{O}_{V \times P_j}$ -Modulgarben $\mathcal{N}_j := \text{bi } \beta_j$ in der Nähe von a frei, d.h. es gibt eine Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von $f(a)$ und eine Nullumgebung $\tilde{W} := P(0, \tilde{S}) \subset W$, so daß $\mathcal{N}_j|_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j}$ freier $\mathcal{O}_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j}$ -Modul ist, wobei $\tilde{P}_j := \tilde{W}_{s_j}$ sei.

Es gilt nun $n_j := \mu_a(\mathcal{N}_j) = 1_j$, da $\mathcal{F}_{j,a} / \mathcal{N}_{j,a} = (\text{coker } \beta_j)_a$

und $\dim_{B_j / \mathfrak{m}_{B_j}} ((\text{coker } \beta_j)_a / \mathfrak{m}(\text{coker } \beta_j)_a) = s_{j+1} < s_j$ ist und

daher mit $A := \mathcal{O}_{Y, f(a)}$, $B_j := \mathcal{O}_{V \times P_j, a} = \mathcal{O}_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j, a}$ und

$K_j := Q(B_j / \mathfrak{m}_{B_j})$, dem Quotientenkörper von $B_j / \mathfrak{m}_{B_j}$,

$\mathcal{F}_{j,a} \otimes_{B_j} K_j \cong \mathcal{N}_{j,a} \otimes_{B_j} K_j = K_j^{\mu_j}$ gilt.

Dann sind für alle $0 \leq j \leq k$ die $\beta_j|_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j} : \mathcal{O}_{V \times P_j}^1|_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{\tilde{V} \times \tilde{P}_j}$ injektiv, und somit ist nach Lemma (2.5) $\mathcal{F}_a$ über $\mathcal{O}_{Y, f(a)}$ flach.

Es folgt mit Satz (3.9) i) $\Rightarrow$ vi) die Behauptung.

4. Beispiele zur Beschreibung analytischer Modulhomomorphismen in der Kategorie der topologischen Vektorräume.

Im letzten Abschnitt kommen wir auf die im ersten Abschnitt behandelten endlich erzeugten A-Moduln M über analytischen Algebren A versehen mit der kanonischen Topologie zurück.

Wie Lemma (1.1) zeigte, sind A-Modulhomomorphismen $f : M \rightarrow N$ zwischen endlich erzeugten A-Moduln M und N als (bezüglich der kanonischen Topologie) stetige $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen zerfallend, d.h. $\ker f$ und $\operatorname{Im} f$ sind topologisch direkt komplementierbare Unterräume von M bzw. N.

(4.1) Beispiel : Nach [V-W 2] Satz 2.4. gibt es eine exakte Sequenz nuklearer Fréchet-Räume :

$$0 \rightarrow \bigwedge_{\infty}(K) \xrightarrow{a} \bigwedge_{\infty}(K) \xrightarrow{b} \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})} \rightarrow 0$$

Daraus erhält man nach (0.1.8) eine duale exakte Sequenz: (*)

$$0 \rightarrow \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{b'} \bigwedge_{\infty}(K)' \xrightarrow{a'} \bigwedge_{\infty}(K)' \rightarrow 0$$

Sei nun $M := K := \bigwedge_{\infty}(K)'$, $N := M \oplus K/D$ mit $D := d(\Delta)$, dem Bild der Diagonale $\Delta \subset \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})} \oplus \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})}$ unter der Abbildung $d := b' \oplus b' : \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})} \oplus \bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})} \rightarrow M \oplus K$, und

$$\begin{aligned} \text{sei } \tilde{M} &:= i(M) \text{ für } i : M \subset M \oplus K \xrightarrow{\text{kan}} N \\ \text{und } \tilde{K} &:= j(K) \text{ für } j : K \subset M \oplus K \xrightarrow{\text{kan}} N. \end{aligned}$$

Dann zerfallen die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \tilde{M} \xrightarrow{f} N \rightarrow N/\tilde{M} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow \tilde{K} \subset N \xrightarrow{g} N/\tilde{K} \rightarrow 0,$$

und $g \circ f : \tilde{M} \rightarrow N/\tilde{K}$ ist nicht zerfallend.

Beweis : Nach (0.1.8) und (0.6.5) zerfällt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{M} \xrightarrow{f} N \rightarrow N/\tilde{M} \rightarrow 0 \quad \text{wegen} \quad N/\tilde{M} = (\tilde{M} + \tilde{K})/\tilde{M} \cong \tilde{K}/\tilde{K} \cap \tilde{M}$$

$$\text{und} \quad \tilde{K}/\tilde{K} \cap \tilde{M} \cong \bigwedge_{\infty}(K)' / b'(\bigwedge_{\infty}(K)^{(\mathbb{N})}) \underset{(*)}{\cong} \bigwedge_{\infty}(K)'$$

und ebenso zerfällt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K} \subset N \xrightarrow{g} N/\tilde{K} \rightarrow 0 \quad \text{und es gilt: } N \cong \bigwedge_{\infty}(K)'.$$

Jedoch zerfällt die exakte Sequenz $0 \rightarrow \tilde{M} \cap \tilde{K} \subset N \rightarrow N/\tilde{M} \cap \tilde{K} \rightarrow 0$ nicht, da man wegen $\tilde{M} \cap \tilde{K} \cong \bigwedge_{\infty}(k)^{(\mathbb{N})}$ und $N \cong \bigwedge_{\infty}(k)' \cong N/\tilde{M} \cap \tilde{K}$ sonst eine zerfallende Sequenz der Form

$0 \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k)^{(\mathbb{N})} \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k)' \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k)' \rightarrow 0$ erhielte, also dual nach (0.1.4) und (0.1.8) eine zerfallende exakte Sequenz $0 \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k) \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k) \rightarrow \bigwedge_{\infty}(k)^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$ im Widerspruch zur Tatsache, daß auf $\bigwedge_{\infty}(k)^{\mathbb{N}}$ keine stetige Norm existiert.

Das Beispiel zeigt, daß die Verknüpfung zweier zerfallender stetiger Vektorraumhomomorphismen zwischen analytischen Moduln im allgemeinen nicht mehr zerfallend ist. Außerdem sieht man anhand der exakten Sequenz $0 \rightarrow \tilde{M} \cap \tilde{K} \subset N \rightarrow N/\tilde{M} \cap \tilde{K} \rightarrow 0$, daß Durchschnitte komplementierbarer Unterräume analytischer Moduln nicht komplementierbar sein müssen, insbesondere sind abgeschlossene Unterräume analytischer Moduln nicht notwendig komplementierbar.

Man kann nun fragen: Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen, die bei Verknüpfung erhalten bleiben, sind Verknüpfungen stetiger zerfallender Vektorraumhomomorphismen zwischen analytischen Moduln wieder zerfallend?

oder: Gibt es eine abelsche Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathbb{C}$ -TVR, der Kategorie der topologischen $\mathbb{C}$ -Vektorräume, so daß

- für jedes Objekt $V \neq 0$ von $\mathcal{C}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß V als topologischer Vektorraum isomorph ist zu $\mathbb{C}^n$ oder $\bigwedge_{\infty}(\sqrt[n]{k})'$, d.h., daß V als topologischer Vektorraum isomorph zu einem analytischen Modul ist,
- die Morphismenmengen $\text{MOR-}\mathcal{C}(V, W)$ alle Modulhomomorphismen $A\text{-MOD}(V, W)$ umfassen, für alle A -Modulstrukturen auf V und W über analytischen Algebren A , die die topologische Vektorraumstruktur von V und W induzieren,
- für jede analytische Algebra A alle kurzen exakten A -Modulsequenzen $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ von endlich erzeugten A -Moduln als kurze exakte Sequenzen von $\mathcal{C}$ zerfallen?

(4.2) Beispiel : Sei

$$i : L := \bigwedge_{\infty}(k)' \oplus \bigwedge_{\infty}(k^2)' \subset M := \bigwedge_{\infty}(k)' \oplus \bigwedge_{\infty}(k^2)' \oplus \bigwedge_{\infty}(k)', \\ (u, v) \mapsto (u, v, 0)$$

die Inklusion und seien

$$p : M \longrightarrow N := \bigwedge_{\infty}(k^2)' \oplus \bigwedge_{\infty}(k)' \quad \text{und} \quad q : M \longrightarrow P := \bigwedge_{\infty}(k)' \\ (u, v, w) \mapsto (v, w) \quad (u, v, w) \mapsto u$$

die Projektionen.

Dann gibt es auf L und M mit der topologischen Vektorraumstruktur verträgliche $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulstrukturen, so daß i ein $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulhomomorphismus ist. Ebenso gibt es auf M und N bzw. P mit der topologischen Vektorraumstruktur verträgliche $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulstrukturen, so daß p bzw. q ein $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulhomomorphismus ist.

Aber auf $\text{Bi}(\text{poi}) = \text{poi}(L)$ bzw. $\text{Ke}(qoi) = \{x \in L : qoi(x) = 0\}$ gibt es keine A-Modulstruktur über einer analytischen Algebra A, die die topologische Vektorraumstruktur induziert.

Beweis : Es gibt einen topologischen Vektorraumisomorphismus

$$t : L = \bigwedge_{\infty}(k)' \oplus \bigwedge_{\infty}(k^2)' \xrightarrow{\sim} \bigwedge_{\infty}(k)', \text{ so daß vermöge}$$

$1 : \mathbb{C}\{z\} = \bigwedge_{\infty}(k)'$ auf L eine mit der topologischen Vektorraumstruktur verträgliche Modulstruktur induziert wird, ebenso auf M vermöge $1ot + 1 : M = L \oplus \bigwedge_{\infty}(k)' \longrightarrow \mathbb{C}\{z\} \oplus \mathbb{C}\{z\}$, so daß $i : L \subset M$ trivialerweise $\mathbb{C}\{z\}$ -linear ist.

Genauso gibt es auf M und N bzw. P mit der topologischen Vektorraumstruktur verträgliche $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulstrukturen, so daß

$$p : M \longrightarrow N \text{ bzw. } q : M \longrightarrow P \text{ } \mathbb{C}\{z\}\text{-linear ist.}$$

Da nun $\text{poi}(L) = \bigwedge_{\infty}(k^2)' = \text{Ker}(qoi)$ ist und $\bigwedge_{\infty}(k^2)$ nach (0.6.6) nicht zu $\bigwedge_{\infty}(\sqrt[n]{k})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ als topologischer Vektorraum isomorph sein kann, folgt mit (1.4) die Behauptung.

Das Beispiel zeigt, daß es auf L und N bzw. P keine endlichen analytischen A-Modulstrukturen geben kann, die die topologische Vektorraumstruktur von L und N bzw. P induzieren und den stetigen Vektorraumhomomorphismus poi bzw. qoi zu einem A-Modulhomomorphismus machen.

Das Beispiel zeigt weiter, daß man den topologischen Vektorräumen $\bigwedge_{\infty}(\sqrt[n]{k})'$, $n \in \mathbb{N}$, nicht beliebige mit der topologischen Vektorraumstruktur verträgliche A-Modulstrukturen zuordnen kann, wenn Bilder (im Sinne von $\mathcal{C}$ -TVR) und Kerne von Morphismen aus $\mathcal{C}$ Objekte in $\mathcal{C}$ sein sollen.

(4.2.1) Folgerung : Es gibt keine abelsche Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ -TVR, die die Eigenschaften a) und b) erfüllt.

Beweis: Angenommen in $\mathcal{C}$ gibt es einen Kern K für die in (4.1) angegebene Abbildung $qoi : L \rightarrow P$. Dann gilt für den analytischen Modul $K \subset Ke(qoi)$ als abgeschlossenen Unterraum von $Ke(qoi) = \bigwedge_{\infty}(k^2)'$ nach (0.6.6), daß $n := \dim(K) < +\infty$ ist.

Sei nun $Q \subset Ke(qoi)$ ein Untervektorraum mit $n < m := \dim(Q) < +\infty$. Auf $L = Q \oplus L/Q$ gibt es vermöge eines topologischen Vektorraumisomorphismus auf die $\mathbb{C}\{z\}$ -direkte Summe $\mathbb{C}\{z\}/(z^m) \oplus (z^m)$ der $\mathbb{C}\{z\}$ -Moduln $\mathbb{C}\{z\}/(z^m)$ und (z^m) eine $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulstruktur, die auf Q die $\mathbb{C}\{z\}$ -Modulstruktur von $\mathbb{C}\{z\}/(z^m)$ induziert und so die Inklusion $j : Q \subset Ke(qoi)$ $\mathbb{C}\{z\}$ -linear macht. Daher ist j ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Dies steht im Widerspruch zur universellen Eigenschaft von K, nach der es dann eine injektive $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung von Q nach K gäbe.

Man kann nun die ursprüngliche Frage abschwächen:

Gibt es eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$, so daß für jede analytische Algebra A das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A\text{-MOD} & \xrightarrow{\tilde{V}_A} & \mathcal{C} \\ V_A \searrow & & \swarrow V \\ & ANMOD & \end{array} \quad \text{kommutiert, wobei}$$

$\tilde{V}_A$, V_A , und V die entsprechenden Vergißfunktoren seien,

und für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ aus A-MOD die induzierten kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \tilde{V}_A(K) \rightarrow \tilde{V}_A(M) \rightarrow \tilde{V}_A(N) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{C} \text{ zerfallen ?}$$

(4.3) Satz : Sei $R := \mathbb{C}\{z\}$. Dann erhält man durch

- a) die endlich erzeugten R -Moduln versehen mit der kanonischen Topologie zusammen mit
- b) den stetigen Vektorraumhomomorphismen $f : M \rightarrow N$, für die es einen freien R -Untermodul $F \subset M$ mit $\dim(M/F) < \infty$ gibt, so daß $f|_F : F \rightarrow N$ R -Modulhomomorphismus ist,

eine abelsche Kategorie $\mathcal{K}$, deren Morphismenmengen $\text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ die Modulhomomorphismenmengen $R\text{-MOD}(M, N)$ umfassen und in der kurze exakte Sequenzen zerfallen.

Beweis : Im Beweis bezeichnen für einen Vektorraumhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ zwischen endlich erzeugten R -Moduln M und N

$\text{Ker } f$ bzw. $\text{Bi } f$ Kern bzw. Bild von f im Sinne der Kategorie der $\mathbb{C}$ -Vektorräume. Für einen Untermodul $U \subset M$ mit $\dim(M/U) < \infty$ wird M als $\mathbb{C}$ -direkte Summe von U und M/U aufgefaßt und mit $M = U \oplus_{\mathbb{C}} M/U$ bezeichnet; R -direkte Summen werden mit $L \oplus_R N$ bezeichnet.

1) Für $f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ und einen freien R -Untermodul $F \subset M$ für f , d.h. für den $\dim(M/F) < \infty$ gilt und $f|_F : F \rightarrow N$ R -linear ist, gilt $\dim(\text{Bif}/f(F)) < \infty$:

Wegen $\dim(M/F) < \infty$ ist $M = F \oplus_{\mathbb{C}} M/F$ und es ist $\text{Bif}/f(F)$ $\mathbb{C}$ -linear isomorph zum endlichdimensionalen Vektorraum $f(M/F)/f(F) \cap f(M/F)$.

2) Ist $f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ und $g \in \text{MOR-}\mathcal{K}(N, P)$, so ist $g \circ f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, P)$:

Sei F freier R -Untermodul von M für f , G freier R -Untermodul von N für g . Da R Hauptidealring ist, ist $f(F) \cap G$ als Untermodul eines freien Moduls frei, und es gibt daher eine R -lineare Abbildung

$s : f(F) \cap G \rightarrow F$ mit $f|_F \circ s = i_{f(F) \cap G} : f(F) \cap G \subset G$.

$g(f(F) \cap G)$ ist R -Untermodul von P und läßt sich als endlich erzeugter Modul über dem Hauptidealring R zerlegen :

$g(f(F) \cap G) = T \oplus_R E$ mit dem Torsionsmodul T von $g(f(F) \cap G)$ und dem freien R -Untermodul $E \subset g(f(F) \cap G)$. Es gibt daher eine R -lineare Abbildung $t : E \rightarrow f(F) \cap G$ mit $g \circ t = i_E$.

Sei $H := \text{Ker}(f|_F) \oplus_R s(\text{Ker}(g|_{f(F) \cap G}) \oplus_R t(E))$.

Dann ist H als R -Untermodul eines freien R -Moduls frei und es gilt :

$$\begin{aligned} \dim(M/H) &< \infty, \text{ da } \dim(F/H) = \dim((F/\text{Ker } f|_F)/(H/\text{Ker } f|_F)) = \\ &= \dim(f(F)/\text{Ker}(g|_{f(F) \cap G}) \oplus_R t(E)) = \dim(f(F)/f(F) \cap G) + \\ &\quad + \dim(g(f(F) \cap G)/E) \end{aligned}$$

sowie: $g \circ f|_H : H \rightarrow P$ ist R -linear.

3) Sind $f, g \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$, dann ist $f + g \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$:
 Sei $F \subset M$ freier Untermodul für f , $G \subset N$ für g , dann ist
 $H := F \cap G$ als Untermodul von F frei. Es gilt $\dim(F/H) < \infty$,
 da $F/F \cap G \cong (F + G)/G \subset M/G$. Also ist auch $\dim(M/H) < \infty$,
 und $(f + g)|_H: H \rightarrow N$ ist R -linear.

4) In $\mathcal{K}$ existieren Nullobjekte.

5) In $\mathcal{K}$ existieren Biprodukte.

6) In $\mathcal{K}$ existieren Kerne : Sei F freier Untermodul für
 $f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$. Dann ist $\text{Ker}f|_F = \text{Ker}f \cap F$ freier Untermodul
 von M mit $\text{Ker}f/\text{Ker}f \cap F = (\text{Ker}f + F)/F \subset M/F$, und es gilt
 $\dim(\text{Ker}f/\text{Ker}f|_F) < \infty$. Es ist $\text{Ker}f = \text{Ker}f|_F \oplus_{\mathbb{C}} E$ $\mathbb{C}$ -direkte
 Summe des freien R -Moduls $\text{Ker}f|_F$ und des endlichdimensionalen
 Vektorraums $E := \text{Ker}f/\text{Ker}f|_F$. Vermöge eines Vektorraumisomorphismus
 $E \cong R/(z^n)$ trage E eine R -Modulstruktur und $\text{Ker}f$ die damit durch
 die R -direkte Summe $\text{Ker}f|_F \oplus_R E$ induzierte Modulstruktur.
 $\text{ker}f: \text{Ker}f \subset M$ ist somit ein Morphismus in $\mathcal{K}$ und hat die
 universelle Eigenschaft eines Kerns in $\mathcal{K}$.

7) In $\mathcal{K}$ existieren Kokerne : Sei $f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ und $F \subset M$
 ein freier R -Untermodul für f , dann ist $f(F)$ R -Untermodul von N ,
 und läßt sich R -direkt zerlegen : $f(F) = T_{f(F)} \oplus_R F_{f(F)}$ mit dem
 Torsionsmodul $T_{f(F)}$ von $f(F)$ und einem freien R -Untermodul $F_{f(F)}$
 von $f(F)$. Ebenso läßt sich $N/f(F)$ R -direkt zerlegen :
 $N/f(F) = T_{N/f(F)} \oplus_R F_{N/f(F)}$ mit dem Torsionsmodul $T_{N/f(F)}$ von $f(F)$
 und einem freien R -Untermodul $F_{N/f(F)}$ von $N/f(F)$.

Da für $B := \text{Bif}/f(F)$ gilt : $m := \dim(B) < \infty$, gibt es für
 alle $1 \leq i \leq m$ Elemente $b_i \in N/f(F)$, $b_i = s_i + t_i$ für

$s_i \in F_{N/f(F)}$ und $t_i \in T_{N/f(F)}$, mit $B = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C} b_i$.

Sei $\tilde{B} := \langle \{s_i : 1 \leq i \leq m\} \rangle$ der von $\{s_i : 1 \leq i \leq m\}$ erzeugte
 Untervektorraum von $F_{N/f(F)}$. Dann gibt es nach (HS) einen freien
 R -Untermodul $G \subset F_{N/f(F)}$ mit $\dim(F_{N/f(F)}/G) < \infty$, so daß
 $F_{N/f(F)} = G \oplus_{\mathbb{C}} F_{N/f(F)}/G$ ist mit $\tilde{B} \subset F_{N/f(F)}/G$.

Sei $s : G \rightarrow N$ eine R -lineare Abbildung mit $q \circ s = i_G$, wobei $q : N \rightarrow N/f(F)$ die kanonische R -lineare Surjektion sei.

Dann gilt für den freien Untermodul $H := F_{f(F)} \oplus_R s(G)$ von N ,

daß $\dim(N/H) = \dim(T_{f(F)} \oplus_{\mathbb{C}} F_{N/f(F)}/G \oplus_{\mathbb{C}} T_{N/f(F)}) < \infty$ ist.

Auf $N/\text{Bif} = (N/f(F))/B = G \oplus_{\mathbb{C}} (F_{N/f(F)}/G \oplus_{\mathbb{C}} T_{N/f(F)})/B$ sei

wie in 6) auf Kef eine R -Modulstruktur eingeführt.

$\text{cokerf} : N \rightarrow N/\text{Bif}$ wird somit zu einem Morphismus in $\mathcal{K}$

und erfüllt die universelle Eigenschaft eines Kokerns in $\mathcal{K}$.

(HS) : Sei F ein endlich erzeugter freier R -Modul, $E \subset F$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum.

Dann gibt es einen freien R -Untermodul $G \subset F$ von F mit

$\dim(F/G) < \infty$, so daß $G \cap E = 0$ ist :

Zunächst sei dies für $F = R$ durch Induktion nach $n := \dim(E)$ gezeigt : Ist $\underline{n = 0}$, so ist nichts zu zeigen. Für $\underline{n > 0}$ sei

$E = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} e_i \subset F$ mit $e_i \in F$. Nach Induktionsvoraussetzung

gibt es für $E' := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C} e_i$ einen freien R -Untermodul $G' \subset F$

mit $\dim(F/G') < \infty$, so daß $G' \cap E' = 0$ gilt.

Da R Hauptidealring ist, ist $G' = (g)$ für ein $g \in R$ und für

$e_n \in F$ gibt es daher $r \in R$ und $v \in F/G'$ mit $e_n = r g + v$,

so daß man mit $G := (z r g)$ einen freien R -Untermodul von F erhält, der das Gewünschte leistet.

Ist nun $F = \bigoplus_{j=1}^m R f_j$, dann gibt es $r_{ij} \in R$ für alle $1 \leq i \leq n$

und $1 \leq j \leq m$ mit $e_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} f_j$.

Für $E_j := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} r_{ij} f_j$ $R_j := R f_j$ gibt es nach dem eben Ge-

zeigten freie R -Untermoduln $G_j \subset R_j$ mit $\dim(R_j/G_j) < \infty$ und

$E_j \cap G_j = 0$ für $1 \leq j \leq m$, so daß $G := \bigoplus_{j=1}^m G_j \subset F$ ein freier

R -Untermodul mit den verlangten Eigenschaften ist.

8) Morphismen in $\mathcal{K}$ faktorisieren, d.h. für jeden Morphismus $f: M \rightarrow N$ aus $\mathcal{K}$ ist der Morphismus $\bar{f}: \text{coker}(\ker f) \rightarrow \ker(\text{coker } f)$ ein Isomorphismus.

9) $R\text{-MOD}(M, N) \subset \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ für alle $M, N \in \mathcal{K}$.

10) Kurze exakte Sequenzen $0 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \rightarrow 0$ aus $\mathcal{K}$ zerfallen in $\mathcal{K}$:

Sei F freier R -Untermodul von M für p , dann gilt, da p surjektiv ist, daß $\dim(N/p(F)) < \infty$ ist, so daß $q_1: M \xrightarrow{p} N \rightarrow N/p(F)$ eine $\mathbb{C}$ -lineare Rechtsinverse $s_1: N/p(F) \rightarrow M$ besitzt.

Zu $p|_F: F \rightarrow p(F) = T_{p(F)} \oplus_R E$ mit dem Torsionsmodul $T_{p(F)}$ von $p(F)$ und dem freien R -Untermodul E von $p(F)$ gibt es $s_2 \in R\text{-MOD}(E, F)$ mit $p|_F \circ s_2 = i_E$.

Und zu $q_2: F \xrightarrow{p} p(F) \rightarrow T_{p(F)}$ gibt es, weil q_2 surjektiv ist, eine $\mathbb{C}$ -lineare Rechtsinverse $s_3: T_{p(F)} \rightarrow F$.

Wie im Beweis von (1.1) folgt, daß es ein $t \in \text{MOR-}\mathcal{K}(p(F), F)$ gibt mit $p|_F \circ t = \text{id}_{p(F)}$.

Insgesamt folgt wiederum wie im Beweis von (1.1), daß es ein $s \in \text{MOR-}\mathcal{K}(N, M)$ gibt mit $p \circ s = \text{id}_N$, so daß die kurze exakte Sequenz in $\mathcal{K}$ zerfällt.

(4.3.1) Bemerkung: Für $f \in \text{MOR-}\mathcal{K}(M, N)$ gibt es einen freien R -Untermodul $F \subset M$ von M , so daß $f(F)$ ein freier R -Untermodul von N ist.

(4.3.2) Bemerkung: Für $A := \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ führt eine analoge Definition der Morphismen zwischen endlich erzeugten A -Moduln M und N , die sichert, daß die Bilder (im Sinne der Kategorie der topologischen Vektorräume) analytische Moduln sind, nicht zu einer Kategorie.

Für die Kategorie $\mathbb{C}\{z\}\text{-MOD}$ existiert also eine abelsche Kategorie $\mathcal{K}$ in der kurze exakte Sequenzen zerfallen, so daß

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{z\}\text{-MOD} & \xrightarrow{U} & \mathcal{K} \\ V \searrow & & \swarrow W \\ & \text{ANMOD} & \end{array} \quad \text{mit } U, V, W, \text{ den entsprechenden Vergißfunktoren, kommutiert.}$$

Die Frage, ob es eine abelsche Kategorie $\mathcal{C}$ gibt, in der kurze exakte Sequenzen zerfallen, so daß

$$\begin{array}{ccc} A\text{-MOD} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ G \searrow & & \swarrow H \\ & \text{ANMOD} & \end{array} \quad \text{mit } F, G, H, \text{ den entsprechenden Vergißfunktoren, kommutiert, wobei } A \text{ eine analytische Algebra der Krulldimension } k \geq 2 \text{ sei,}$$

läßt sich für den analogen Fall über formalen Potenzreihen leicht beantworten : Nach [Bou] chap.II § 6 exercice 13 ist $\hat{\text{ANMOD}}$ selbst schon eine abelsche Kategorie, in der kurze exakte Sequenzen zerfallen.

Wesentlich ist dabei, daß für abgeschlossene Untervektorräume U und V dieser topologischen Vektorräume gilt : $U + V$ ist wieder abgeschlossen; sowie, daß abgeschlossene Untervektorräume topologisch direkt komplementierbar sind.

Dies gilt für analytische Moduln nicht, wie (4.1) und folgendes Beispiel zeigt :

(4.4) Beispiel : Sei $\mathbb{C}\{z\}$ versehen mit der kanonischen Topologie.

$$A := \left\{ f \in \mathbb{C}\{z\} : f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} \right\} \quad \text{und}$$

$$B := \left\{ f \in \mathbb{C}\{z\} : f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^{2n} + \frac{1}{n!} z^{2n+1} \right) \right\}$$

sind abgeschlossene Untervektorräume von $\mathbb{C}\{z\}$, aber $A + B$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{C}\{z\}$.

Beweis : 1) Zeige exemplarisch : B ist abgeschlossen .

Wegen (0.1.4) genügt es, zu zeigen : B ist folgenabgeschlossen.

Sei also (f_j) eine Folge aus B , die gegen ein $h \in \mathbb{C}\{z\}$ konvergiert, d.h. nach (0.1.4) es gibt ein $t > 0$, so daß

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - h\|_t = 0 \quad \text{ist.}$$

$$\text{Mit } f_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n} \left(z^{2n} + \frac{1}{n!} z^{2n+1} \right) \text{ und } h = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

$$\text{also mit } f_j - h = \sum_{n=0}^{\infty} \left((a_{j,n} - b_{2n}) z^{2n} + \left(\frac{a_{j,n}}{n!} - b_{2n+1} \right) z^{2n+1} \right)$$

$$\text{folgt daher } b_{2n} = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{j,n} \text{ und } b_{2n+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j,n}}{n!} = \frac{b_{2n}}{n!}, \text{ und}$$

somit $h \in B$.

2) Angenommen $A + B$ ist abgeschlossen. Dann folgt, da für

$$\text{alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad z^{2n+1} \in A + B \text{ ist, daß } \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \in A + B \text{ ist,}$$

$$\text{d.h. } \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(z^{2n} + \frac{1}{n!} z^{2n+1} \right).$$

$$\text{Durch Koeffizientenvergleich folgt } a_n + b_n = 0 \text{ und } \frac{1}{n!} b_n = 1,$$

also $a_n = -n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ nicht konvergent. Widerspruch!

Kann man aber dennoch für einen endlichen analytischen A-Modul M mit der kanonischen Topologie durch geschickte Auswahl topologischer direkter Komplemente erreichen, daß für $W \in V(M) := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ gilt:

W ist analytischer Modul und topologisch direkt komplementierbar?

Dabei sei

$$V_0 := W_0 \cup W_0^{\perp} \text{ mit } W_0 := \{W \subset M : W \text{ ist Untermodul von } M\}$$

$$W_0^{\perp} := \{V \subset M : V \in K(W) \text{ für ein } W \in W_0\}$$

$$V_n := W_n \cup W_n^{\perp} \text{ mit } W_n := \{W \subset M : W = U \cap V \text{ oder } W = U + V \\ \text{für } U, V \in V_{n-1}\}$$

$$W_n^{\perp} := \{V \subset M : V \in K(W) \text{ für ein } W \in W_n\}$$

wobei für einen topologisch direkt komplementierbaren Unterraum $W \subset M$ die ihm zugeordnete Menge $K(W)$ eine bestimmte Teilmenge der Menge $\{V \subset M : V \text{ ist topologisch direktes Komplement von } W\}$ sei.

Beispielsweise bietet sich für $A := \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ der Grauertssche Divisionssatz zur Konstruktion topologisch direkter Komplemente von Idealen in A nach (0.5.4) an. Es ist nicht klar, ob Durchschnitte so gewonnener Komplemente mit Idealen von A wieder eine topologische Basis haben. Folgendes Beispiel zeigt, daß im allgemeinen keine ausgezeichnete topologische Basis existiert:

(4.5) Beispiel : Sei $\mathcal{A} = (\sum_{n=0}^{\infty} z_2^{n+2} + z_1^3) \subset A$ und C das

topologisch direkte Komplement von $(z_1 \cdot z_2)$ nach dem Grauertsschen Divisionssatz.

Dann hat $D := \mathcal{A} \cap C$ keine ausgezeichnete topologische Basis.

Beweis : 1) Zunächst wird für das Ideal $\mathcal{B} := (z_2^k + z_1^1) \subset A$ mit $1, k \in \mathbb{N}$, $1 > k$ und das Komplement $C = \mathbb{C}\{z_2\} \oplus \mathbb{C}\{z_1\} \cdot z_1$ die Menge der privilegierten Exponenten $P(\mathcal{B} \cap C)$ des Durchschnitts $\mathcal{B} \cap C$ berechnet.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } P(\mathcal{B} \cap C) &\subset P(\mathcal{B}) \cap P(C) = ((0, k) + \mathbb{N}_0^2) \cap (\mathbb{N}_0 \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{N}_0) \\ &\subset \{0\} \times \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $m = k \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i z_1^{1 \cdot i} z_2^{k \cdot (n-1-i)} \right) (z_2^k + z_1^1) = z_2^{k \cdot n} + (-1)^{n-1} z_1^{1 \cdot n}, \text{ so}$$

daß $\{(0, m) : m = k \cdot n, n \in \mathbb{N}\} \subset P(\mathcal{B} \cap C)$ ist.

Mittels Koeffizientenvergleichs erhält man für $q = \sum_{\mu \in \mathbb{N}_0^2} q_{\mu} z^{\mu}$

mit $q(z_2^k + z_1^1) \in C$, d.h. mit $q(z_2^k + z_1^1) = a + b$ für

$$a = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n z_2^n \in \mathbb{C}\{z_2\} \text{ und } b = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n z_1^{n+1} \in \mathbb{C}\{z_1\} \cdot z_1,$$

also mit (*): $q(z_2^k + z_1^1) =$

$$= \sum_{\substack{0 \leq \mu_1 < 1 \\ \mu_2 \geq k}} q_{\mu-(0,k)} z^{\mu} + \sum_{\substack{\mu_1 \geq 1 \\ 0 \leq \mu_2 < k}} q_{\mu-(1,0)} z^{\mu} + \sum_{\substack{\mu_1 \geq 1 \\ \mu_2 \geq k}} (q_{\mu-(0,k)} + q_{\mu-(1,0)}) z^{\mu}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n z_2^n + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n z_1^{n+1},$$

folgende notwendige Bedingungen an die Koeffizienten von q :

$$I) \begin{cases} q_{(0,n)} = a_{n+k} \\ q_{(i,n)} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq l-1 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

$$II) \begin{cases} q_{(n,0)} = b_{n+l-1} \\ q_{(n,j)} = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq k-1 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

$$III) \quad q_{(\mu_1+1, \mu_2)} + q_{(\mu_1, \mu_2+k)} = 0 \quad \text{für alle } (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}_0^2.$$

Sei nun $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq k-1$: Angenommen für $n \in \mathbb{N}$ sei

$a_{kn+r} = 1$, dann folgt wegen $q_{(0, k(n-1)+r)} = a_{kn+r}$ nach I) durch sukzessives Einsetzen in III), daß $q_{(l(n-1), r)} = (-1)^{n-1}$ ist, im Widerspruch zu II).

Insgesamt folgt also : $P(\mathcal{K} \cap C) = \{(0, m) : m = k \cdot n, n \in \mathbb{N}\}$.

2) Seien $e_i \in \mathbb{C}\{z_i\}$ Einheiten für $i = 1, 2$ und sei

$$\mathcal{K} = (e_2^k z_2^k + e_1^l z_1^l) \subset A \quad \text{mit } l, k \in \mathbb{N}, l > k.$$

Sei $\beta : A \rightarrow A$ der durch $z_1 \mapsto e_1 z_1$ und $z_2 \mapsto e_2 z_2$ gegebene $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus.

Gilt für $q \in A$ die Gleichung $q(e_2^k z_2^k + e_1^l z_1^l) = f_1 + f_2$ mit

$$f_i \in \mathbb{C}\{z_i\}, \text{ so gilt auch } \beta^{-1}(q)(z_2^k + z_1^l) = \beta^{-1}(f_1) + \beta^{-1}(f_2).$$

Also ergibt sich mit $g_i := \beta^{-1}(f_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n^{(i)} z_i^n$, und damit

$$\text{mit } f_i = \beta(g_i) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n^{(i)} z_i^n e_i^n, \text{ daß}$$

$$P(\mathcal{K} \cap C) \subset P((z_2^k + z_1^l) \cap C) = \{(0, m) : m = k \cdot n, n \in \mathbb{N}\} \text{ ist.}$$

3) Sei nun $\mathcal{A} = (\sum_{n \in \mathbb{N}_0} z_2^{n+2} + z_1^3) \subset A$. Dann gilt nach 2) für

$e_2 \in \mathbb{C}\{z_2\}$ mit $e_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} z_2^n$ und $e_1 = 1$, daß

$P(\mathcal{A} \cap C) = \{ (0, m) : m = 2n, n \in \mathbb{N} \}$ ist.

Gibt es $f \in D := \mathcal{A} \cap C$ mit $f = z_2^2 + \sum_{\substack{n > 2 \\ \text{ungerade}}} a_n z_2^n + \sum_{n \geq 2} b_n z_1^{n+1}$?

Nach (0.5.6) läßt sich f in der Produkttopologie von $A = \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ darstellen als Limes einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die aus den Potenzreihen

$$h_m := z_2^{2m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_2^n \right)^m + (-1)^{m-1} z_1^{3m} = z_2^{2m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} z_2^n \right) + (-1)^{m-1} z_1^{3m}$$

folgendermaßen entsteht:

$$f_0 := h_1$$

$$f_1 := h_1 - \sum_{m_1 > 1} h_{m_1} =$$

$$= z_2^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_2^n \right) + z_1^3 - \left(\sum_{m_1 > 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m_1-1}{m_1-1} z_2^{n+2m_1} + (-1)^{m_1-1} z_1^{3m_1} \right) \right)$$

$$= z_2^2 + z_1^3 + \sum_{\substack{n > 1 \\ \text{ungerade}}} z_2^n - \left(\sum_{m_1 > 1} \left(\sum_{n > 1} \binom{n+m_1-1}{m_1-1} z_2^{n+2m_1} + (-1)^{m_1-1} z_1^{3m_1} \right) \right)$$

$$f_2 := h_1 - \sum_{m_1 > 1} h_{m_1} + \sum_{m_1 > 1} \left(\sum_{m_2 > m_1} \binom{2m_2-m_1-1}{m_1-1} h_{m_2} \right) =$$

$$= h_1 - \sum_{m_1 > 1} h_{m_1} + \sum_{m_1 > 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2(m_1+k)-m_1-1}{m_1-1} h_{m_1+k} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= z_2^2 + z_1^3 + \sum_{\substack{n>1 \\ \text{ungerade}}} z_2^n - \sum_{m_1>1} \left(\sum_{n \geq 1} \binom{n+m_1-1}{m_1-1} z_2^{n+2m_1} + (-1)^{m_1-1} z_1^{3m_1} \right) \\
 &+ \sum_{m_1>1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k+m_1-1}{m_1-1} z_2^{2k+2m_1} \right) + \\
 &+ \sum_{m_1>1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k+m_1-1}{m_1-1} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \binom{l+m_1+k-1}{m_1+k-1} z_2^{1+2m_1+2k} + (-1)^{m_1+k-1} z_1^{3m_1+3k} \right) \\
 &= z_2^2 + z_1^3 + \sum_{\substack{n>1 \\ \text{ungerade}}} z_2^n - \sum_{m_1>1} \left(\sum_{n>1} \binom{n+m_1-1}{m_1-1} z_2^{n+2m_1} \right) + \\
 &+ \sum_{m_1>1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k+m_1-1}{m_1-1} \right) (-1)^{m_1+k-1} z_1^{3m_1+3k} + \\
 &+ \sum_{m_1>1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k+m_1-1}{m_1-1} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \binom{l+m_1+k-1}{m_1+k-1} z_2^{1+2m_1+2k} \right)
 \end{aligned}$$

Also ist mit $m_0 := 1$

$$\begin{aligned}
 f_n := & h_{m_0} - \sum_{m_1>m_0} h_{m_1} + \sum_{m_1>m_0} \left(\sum_{m_2>m_1} \binom{2m_2-m_1-1}{m_1-1} h_{m_2} \right) - \dots + \\
 & + (-1)^n \sum_{m_1>m_0} \left(\sum_{m_2>m_1} \binom{2m_2-m_1-1}{m_1-1} \dots \sum_{m_n>m_{n-1}} \binom{2m_n-m_{n-1}-1}{m_{n-1}-1} h_{m_n} \right)
 \end{aligned}$$

Es sei $b := \sum_{n \geq 2} b_n z_1^{n+1} = z_1^3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n$, dabei sei $g_n :=$

$$\sum_{m_1>m_0} \binom{2m_1-m_0-1}{m_0-1} \left(\sum_{m_2>m_1} \binom{2m_2-m_1-1}{m_1-1} \dots \sum_{m_n>m_{n-1}} \binom{2m_n-m_{n-1}-1}{m_{n-1}-1} \right) (-1)^{m_n-1} z_1^{3m_n}.$$

Daher erhält man für die Koeffizienten von b :

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 3k & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } n = 3k+1 & \text{"} \\ t_k, & \text{falls } n = 3k-1 & \text{"} \end{cases}$$

wobei $t_k := (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l s_{l,k}$ für $k \geq 2$ und $t_1 := 1$

mit $s_{l,k} := \sum_{m_0=1}^{m_1} \sum_{m_1=1}^{m_2} \dots \sum_{m_{l-1}=1}^{m_l} \binom{2m_1-m_0-1}{m_0-1} \binom{2m_2-m_1-1}{m_1-1} \dots \binom{2m_l-m_{l-1}-1}{m_{l-1}-1}$

Rekursiv lassen sich die t_k folgendermaßen aufschreiben :

$$t_1 = 1 \quad \text{und} \quad t_k = \sum_{j=1}^{k-1} \binom{2k-j-1}{j-1} (-1)^{j-1+k} t_j = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1+i}{2i} (-1)^{i-1} t_{k-i}$$

3a) Behauptung : $t_k > \frac{(k-1)(k-3)}{4} \cdot t_{k-1} > 0$ für alle $k \geq 4$.

Beweis durch Induktion über $k \geq 4$:

Für die Fälle $k = 4, \dots, 8$ rechnet man dies direkt nach.

Für $k > 8$ zeige : $t_k - \frac{(k-1)(k-3)}{4} \cdot t_{k-1} =$

$$= \underbrace{\left(\binom{k}{2} - \frac{(k-1)(k-3)}{4} \right) t_{k-1} - \binom{k+1}{4} t_{k-2}}_{=: A} + \underbrace{\sum_{i=3}^{k-1} \binom{k+1-i}{2i} (-1)^{i-1} t_{k-i}}_{=: B} > 0$$

i) $A > 0$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$t_{k-1} > \frac{(k-2)(k-4)}{4} t_{k-2} > 0 \quad \text{und daher gilt}$$

$$A > \left[\left(\binom{k}{2} - \frac{(k-1)(k-3)}{4} \right) \frac{(k-2)(k-4)}{4} - \binom{k+1}{4} \right] \cdot t_{k-2} =$$

$$\left[\frac{k^2 - 5k - 36}{3 \cdot 4 \cdot 4} \right] \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot t_{k-2} \geq 0 \quad \text{für } k \geq 9.$$

ii) $B > 0$: Man zeigt $D_i := \binom{k-1+i}{2i} \cdot t_{k-i} - \binom{k+i}{2i+2} \cdot t_{k-i-1} > 0$

für ungerades i mit $3 \leq i \leq k-2$:

$$\begin{aligned} \text{Falls } k > 8 \text{ gerade : } D_{k-3} &= \binom{2k-4}{2k-6} \cdot t_3 - \binom{2k-3}{2k-4} \cdot t_2 = \\ &= (2k-4)(2k-5) - (2k-3) \quad 0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } k > 8 \text{ ungerade : } D_{k-2} &= \binom{2k-3}{2k-4} \cdot t_2 - \binom{2k-2}{2k-2} \cdot t_1 = \\ &= (2k-3) - 1 > 0 . \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $3 \leq i \leq k-4$

$$D_i > \underbrace{\left[\binom{k-1+i}{2i} \frac{(k-i-1)(k-i-3)}{4} - \binom{k+i}{2i+2} \right]}_{=: C_i} \cdot t_{k-i-1}$$

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{(k+i-1)(k+i-2) \dots (k-i)}{(2i)!} \frac{(k-i-1)(k-i-3)}{4} - \frac{(k+i) \dots (k-i-1)}{(2i+2)!} = \\ &= (k+i-1) \dots (k-i-1) \left[\frac{k-i-3}{4(2i)!} - \frac{k+i}{(2i+2)!} \right] = \\ &= (k+i-1) \dots (k-i-1) \left[\frac{(2i+1)(2i+2)(k-i-3) - 4(k+i)}{4(2i+2)!} \right] > 0 , \end{aligned}$$

da für alle $4 \leq l \leq k-3$ mit $i = k-l$ gilt :

$$(2i+1)(2i+2)(k-i-3) - 4k - 4i = [(2i+3)(2i-4) - 2](1-3) + 4(i+2)(1-4) > 0$$

Damit ist die Behauptung 3a) bewiesen.

$$3b) \text{ Es folgt } t_k > \frac{((k-3)!)^2}{4^{k-4} 3^2} \quad t_3 > \frac{((k-3)!)^2}{4^k} > 0 \quad \text{für } k \geq 4 .$$

Somit ist $b_{3k-1} > \frac{((k-3)!)^2}{4^k} > 0$, und es gilt :

$$\limsup_k \sqrt[3k]{|b_{3k-1}|} \geq \limsup_k \sqrt[3k]{\frac{((k-3)!)^2}{4^k}} = +\infty .$$

Das heißt : $\sum_{n \geq 2} b_n z_1^{n+1} \notin \mathbb{C} \{z_1\}$, also $f \notin \mathcal{M} \cap \mathbb{C}$, was zu zeigen war.

Das Beispiel (4.5) zeigt, daß es im allgemeinen nicht gelingt für Durchschnitte komplementierbarer Unterräume eines analytischen Moduls ausgezeichnete Basen zu konstruieren und auf diese Weise überhaupt eine topologische Basis zu finden.

Es kann daher auch nichts in Richtung der seit längerem offenen Frage (siehe [Vo]) : Haben direkt komplementierbare Unterräume von $\bigwedge_{\infty}(\alpha)$ eine topologische Basis ? beigetragen werden.

- [B-S] Bănică, C.; Stănăşilă, O.: Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces. John Wiley & Sons, London-New York-Sydney-Toronto 1976 .
- [B-Z 1] Becker, J.; Zame, W.R.: Homomorphisms into Analytic Rings. Amer. J. Math. 101 (1979) 1103 - 1122 .
- [B-Z 2] Becker, J.; Zame, W.R.: Applications of Functional Analysis to the Solution of Power Series Equations. Math. Ann. 243 (1979) 37 - 54 .
- [Bi] Bingener, J.: On the Existence of Analytic Contractions. Invent. math. 64 (1981) 25-67 .
- [Bou] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris, 1981 .
- [D-V] Douady, A.; Verdier, J.-L.: Séminaire de géométrie analytique. Astérisque 16, Soc. Math. de France, Paris, 1974 .
- [EGA] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. IHES 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960-1967) .
- [Fi] Fischer, G.: Complex Analytic Geometry. Lecture Notes in Mathematics 538, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976 .
- [F-W] Floret, K.; Wloka, J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. Lecture Notes in Mathematics 56, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968 .
- [Fo] Forster, O.: Lokale analytische Geometrie. Vorlesung im WS 1975/76 an der Universität Münster. Ausarbeitung: J. Wehler .
- [Ga] Galligo, A.: Sur le théorème de préparation de Weierstrass pour un idéal de $k\{x_1, \dots, x_n\}$. Astérisque 7 & 8, Soc. Math. de France, Paris 1973, 165 - 169 .
- [Gr] Grauert, H.: Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen. Inv. math. 15 (1972) 171 - 198 .
- [G-R 1] Grauert, H.; Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren. Grundle. 176, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971 .
- [G-R 2] Grauert, H.; Remmert, R.: Theorie der Steinschen Räume. Grundle. 227, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977 .
- [Gro] Grothendieck, A.: Espaces vectoriels topologiques. 3.a Ed., Sao Paulo, 1964 .

- [Hi] Hironaka, H.: Flattening Theorem in Complex-Analytic Geometry. Amer. J. Math. 97 (1975) 503 - 547 .
- [Ju] Jurchescu, M.: On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module. Bull. Soc. Math. France 93 (1965) 129 - 153 .
- [K-K] Kaup, L.; Kaup, B.: Holomorphic Functions. Studies in Math. 3, de Gruyter, Berlin-New York, 1983 .
- [Ke] Kexel, W.: Zariski-Offenheit von eigentlichen, flachen holomorphen Abbildungen. manusc. math. 27 (1979) 359 - 390 .
- [Kö] Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Grundle. 107 Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1966 (2.Aufl.) .
- [Ku] Kultze, R.: Garbentheorie. B.G. Teubner, Stuttgart, 1970 .
- [Pie] Pietsch, A.: Nuclear Locally Convex Spaces. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972 .
- [R-G] Raynaud, M.; Gruson, L.: Critères de platitude et de projectivité. Inv. math. 13 (1971) 1 - 89 .
- [Ro 1] Rolewicz, S.: On spaces of holomorphic functions. Studia Math. 21 (1961) 135 -160 .
- [Ro 2] Rolewicz, S.: Metric Linear Spaces. Warschau, 1972 .
- [Schae] Schaefer, H.-H.: Topological Vector Spaces. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973 .
- [Ti] Tillmann, H.G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. 59 (1953) 61 - 83 .
- [Toe] Toeplitz, O.: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie. Comment. Helv. 23 (1949) 222 - 242 .
- [Vo] Vogt, D.: Eine Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen. manusc. math. 37 (1982) 269 - 301 .
- [V-W 1] Vogt, D.; Wagner M.J.: Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau. Studia Math. 67 (1980) 225 - 240 .
- [V-W 2] Vogt, D.; Wagner M.J.: Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräume von unendlichem Typ. Studia Math. 70 (1981) 63 - 80 .

- [Wey] Weydt, G.: Zur Charakterisierung der nichtreduzierten Steinschen Algebren. Bayreuther Math. Schr., Heft 14, 1983, 121 - 268 .
- [Wo] Wolffhardt, K.: Zur lokalen Hochschild-Homologie eines komplexen Raums. manuscr. math. 37 (1982) 27 - 47 .

Lebenslauf

25.10.54	geboren in München
1961-1965	Besuch der Volksschule an der Südlichen Auffahrtsallee in München
1965-1974	Besuch des Wittelsbacher Gymnasiums in München
Mai 1974	Abitur
seit WS 74/75	Studium der Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München
März 1982	Diplom in Mathematik
seit Juli 1986	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl B für Thermodynamik der Technischen Universität München

